AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

ECOLE DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE MARSEILLE - ED184

Institut de Mathématiques de Marseille - I2M - UMR 7373

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur de l'université d'Aix-Marseille

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Benoît Cadorel

Hyperbolicité complexe et quotients de domaines symétriques bornés

---

Directeur de thèse : **Erwan Rousseau**

Soutenue le 23 mai 2018 devant le jury composé de :

Sébastien Boucksom	École Polytechnique	*(rapporteur)*
Benoît Claudon	Université de Rennes I	
Simone Diverio	Université de Rome	
Philippe Eyssidieux	Université Grenoble Alpes	*(rapporteur)*
Erwan Rousseau	Aix-Marseille Université	*(directeur de thèse)*
Claire Voisin	Collège de France	

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Erwan Rousseau, pour m'avoir fait découvrir un domaine de recherche particulièrement passionnant. Toutes les idées développées dans les pages qui suivent ont leur source dans un de ses conseils ou une de ses remarques ; par sa confiance et sa supervision avisée, il m'aura transmis une méthode et une vision pragmatique mais lumineuse des êtres mathématiques, que je ne pourrai que m'efforcer de préserver par la suite.

Merci ensuite aux rapporteurs de ce mémoire, Sébastien Boucksom et Philippe Eyssidieux, pour leur patient travail de relecture. Leurs commentaires précis et pertinents ont grandement contribué à améliorer la qualité et la lisibilité de ce manuscrit. J'adresse également toute ma gratitude à Benoît Claudon, Simone Diverio et Claire Voisin, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Un grand merci à tous les membres permanents de l'I2M. Je salue en particulier tous les habitués des séminaires et groupes de travails touchant à la géométrie complexe, lesquels auront toujours été pour moi une excellente motivation pour apprendre de belles mathématiques.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes, jeunes et moins jeunes, qui ont accepté un jour de s'asseoir un moment avec moi pour me parler de mathématiques, que ce soit devant une bière ou devant un tableau noir. Je pense notamment à Damian Brotbek, Nguyen-Bac Dang, Thibaut Delcroix, Ya Deng, Néstor Fernández Vargas, Henri Guenancia, Zhizhong Huang, Louis-Clément Lefèvre, Jie Liu et Pedro Montero. Je remercie chaleureusement Yohan Brunebarbe et Behrouz Taji, pour leur disponibilité et leur générosité.

J'adresse également mes remerciements à tout le personnel administratif et technique de l'I2M, et particulièrement du CMI. Merci ainsi à Marie-Christine, Valérie D., Valérie J., Julien V., Tino, Olivier et Éric, sans le travail fondamental desquels aucun travail de recherche, fondamentale ou non, ne pourrait s'effectuer dans notre laboratoire.

Durant mes années de thèse, beaucoup de doctorants se seront succédés dans les locaux du CMI ou de Luminy. Je pense à Irène, Damien, Arnaud, Lydia, Rémi, Marie-Ève, Angel, Kaidi, Pierre, Vincent, Pierre-Antoine, Anthony, Aurélien, Ibrahima, Giulio, Brice, Antoine G., Quentin, Boris, Paolo, Antoine P.-L., Ahmad, Sarah, Anamaria, Joël, Jesus... Je vous adresse à tous un grand merci pour la convivialité que votre présence a pu apporter à notre laboratoire, et j'adresse mes excuses à celles et ceux que j'aurais pu oublier de citer. Je voudrais aussi saluer quelques post-doctorants qui sont passés par Marseille, et dont l'expérience m'aura été fort profitable durant ces trois années : merci ainsi à Fabio, Sara, Yoshinori et Federico.

Je souhaite maintenant remercier quelques personnes sans la présence desquels ma trajectoire à Marseille n'aurait pu prendre qu'une direction radicalement différente. Merci à Dionysis, Thomas et Cécile, dont la compagnie m'aura été précieuse alors que je débarquais tout juste dans cette ville qui m'était alors inconnue. Merci à Vladimiro, Tim et Valentin, pour leur amitié et leur bonne humeur, malgré les échecs de tous nos groupes de travail successifs. Merci à Julien pour sa sincérité sans faille ; merci à Jordan pour son intelligence et son ouverture à la discussion ; merci à Lionel pour son amitié franche et directe ; merci enfin à Juliana, grâce à qui je lirai peut-être un jour García Márquez dans le texte.

Je tiens à remercier d'autres amis plus anciens dont le soutien indéfectible m'aura toujours été précieux. Merci à Célia et Mickaël, pour m'avoir épaulé dans les moments de doute, à Maxence et Félix pour avoir maintenu chez vous un lieu de convivialité particulièrement bienvenu, à Guillain et Patricia pour vos points de vue toujours originaux, à Guillaume pour ton sens du partage, à Jacques pour nos discussions toujours passionnantes, à Alexandre, que je revois toujours avec plaisir malgré ta fuite outre-Atlantique, et à Romain, pour ton humour, et pour m'avoir autorisé médicalement à ne plus jamais faire de sport. Merci à vous tous pour votre présence, et pour m'avoir permis de garder le cap, que ce fût pendant ma thèse ou bien plus tôt.

Merci aussi à toute ma famille au sens large, à laquelle je dédie cette thèse. Je pense à mes grands-pères, Eugène et Bernard, auxquels j'aurais aimer pouvoir expliquer les pages qui suivent. Merci à mes grands-mères, Marie-Thérèse et Janette, qui n'échapperont pas à une tentative d'explication des dites pages. Merci à mes oncles, mes tantes, mes cousins et mes cousines, toutes ces personnes qui, sans doute bien plus qu'elles ne l'imaginent, ont contribué à faire de moi ce que je suis maintenant. Merci enfin à mes frères Émile et Paul, sans qui je ne serais pas grand chose, et à mon père et ma mère, sans lesquels je serais encore moins.

Merci enfin à cette belle ville de Marseille, qui m'aura apporté beaucoup plus que je n'aurais pu l'imaginer en arrivant ici il y a trois ans.

Table des matières

Remerciements **i**

Introduction **1**

0.1 Hyperbolicité complexe . . . 1
0.1.1 Définitions de base . . . 1
0.1.2 La conjecture de Green-Griffiths-Lang . . . 2
0.2 Compactifications de quotients de domaines symétriques bornés . . . 3
0.3 Différentielles symétriques et différentielles de jets . . . 5
0.3.1 Définitions . . . 5
0.3.2 Théorèmes d'annulation fondamentaux. Existence d'équations différentielles de jets . . . 6
0.3.3 Différentielles symétriques . . . 7
0.4 Présentation des résultats de la thèse . . . 7
0.4.1 Un critère métrique de positivité du fibré cotangent . . . 7
0.4.2 Variétés supportant une variation de structures de Hodge . . . 8
0.4.3 Application du critère au cas des compactifications de quotients de la boule . . . 10
0.4.4 Compactifications de quotients singuliers de domaines symétriques bornés . . . 12
0.4.5 Différentielles de jets d'ordre supérieur sur les quotients de la boule . . . 13
0.4.6 Hyperbolicité de quotients de domaines symétriques bornés généraux . . . 15

1 Un critère métrique de positivité du fibré cotangent d'une variété complexe compacte **19**

1.1 Introduction . . . 19
1.2 Rappels sur le lemme d'Ahlfors-Schwarz . . . 20
1.3 Métriques singulières et positivité faible . . . 22
1.4 Métriques hermitiennes singulières sur les fibrés vectoriels . . . 24
1.5 Preuve du critère de positivité . . . 25
1.6 Application à l'hyperbolicité des variétés supportant une variation de structures de Hodge complexe . . . 27
1.6.1 Rappels sur les variations de structures de Hodge complexes . . . 27
1.6.2 Résultats . . . 29
1.6.3 Variations de structures de Hodge et propriétés de courbure du domaine des périodes . . . 30

2 Différentielles symétriques sur les quotients non compacts de la boule **33**

2.1 Introduction . . . 33
2.2 Metric criterion for the bigness of the cotangent bundle . . . 34
2.2.1 Singular metrics on the tangent bundles . . . 35
2.3 Compactifications of ball quotients . . . 36
2.3.1 Construction of the toroidal compactification of Mok . . . 36

2.3.2 Local coordinates. Bergman metric . . . 37
2.3.3 Bigness of the standard cotangent bundle of a compactification of a ball quotient 39
2.4 Birational transformation between logarithmic and standard projectivized tangent bundles 42
2.4.1 Resolution of the rational maps . . . 43
2.5 Nefness of the cotangent bundles . . . 47
2.6 Immersed submanifolds of $\overline{X}$ . . . 49
2.6.1 Volume and numerical intersection numbers . . . 50
2.7 Compactifications of singular quotients of bounded symmetric domains . . . 55
2.7.1 Resolutions of cyclic quotient singularities . . . 55
2.7.2 Discrepancies . . . 55
2.7.3 Singular metrics . . . 56
2.7.4 Criteria for complex hyperbolicity . . . 57

3 Différentielles de jets sur les compactifications toroïdales minimales de quotients de la boule 59
3.1 Introduction . . . 59
3.1.1 Rappels sur les espaces de jets de Green-Griffiths . . . 59
3.1.2 Résultats . . . 61
3.2 Segre classes of weighted projective bundles . . . 62
3.3 Positivity of weighted vector bundles . . . 68
3.3.1 An example of combinatorial application . . . 71
3.4 Green-Griffiths jet bundles . . . 73
3.4.1 Deformation of the jet spaces . . . 73
3.5 Application to the minimal toroidal compactifications of ball quotients . . . 75
3.5.1 Combinatorial expression of the volume. Uniform lower bound in k . . . 76
3.6 Upper bound on the vanishing conditions on the boundary . . . 78
3.6.1 Filtration on the quotient $\mathcal{Q}_{k,m}$ . . . 78
3.6.2 Upper bound on the graded terms of the filtration . . . 80
3.6.3 Final asymptotic estimate over $h^0(\mathcal{Q}_{k,m})$ as $m \longrightarrow +\infty$. . . . 81
3.6.4 Uniform lower bound in k on $\mathrm{vol}(E^{GG}_{k,m}\Omega_{\overline{X}})$ . . . 82
3.6.5 Explicit orders k to have a big $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$ . . . 82

4 Hyperbolicité de quotients de domaines symétriques bornés quelconques 85
4.1 Introduction . . . 85
4.1.1 Énoncé des résultats . . . 86
4.2 Preuves . . . 87
4.2.1 Bornes sur la courbure de Ricci . . . 87
4.2.2 Pentes de diviseurs effectifs . . . 88
4.2.3 Preuve des résultats principaux . . . 88

Introduction

0.1 Hyperbolicité complexe

0.1.1 Définitions de base

L'étude de l'hyperbolicité complexe remonte aux travaux de Picard, qui a montré qu'il n'existait pas d'application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$, où p_1, p_2, p_3 sont trois points distincts. Pour un certain nombre de raisons que l'on exposera par la suite, cette propriété de la variété $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ est d'un intérêt certain, et conduit à introduire la définition suivante, nommée d'après Brody [Bro78] :

Définition 0.1.1. On dit qu'une variété complexe X est *hyperbolique au sens de Brody* s'il n'existe pas de *courbe entière* sur X, c'est-à-dire d'application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$.

Dans [Kob76], Kobayashi adopte une définition différente de l'hyperbolicité complexe. Il introduit une certaine pseudo-distance définie intrinsèquement sur toute variété complexe X à partir de la métrique infinitésimale suivante :

Définition 0.1.2. Soit $x \in X$, et soit v un vecteur tangent à X en x. La *pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden* évaluée en v est le nombre réel positif

$$\mathbf{k}_X(v) = \inf\{\lambda > 0 \,;\, \exists f : \Delta \longrightarrow X,\ f(0) = x,\ \lambda\, df(\mathbf{e}_1) = v\},$$

où $\Delta \subset \mathbb{C}$ est le disque unité, et $\mathbf{e}_1$ est le vecteur unitaire canonique tangent à 0 dans $\mathbb{C}$.

La version intégrée de cette pseudo-métrique fournit alors la pseudo-distance de Kobayashi.

Définition 0.1.3. Si p et q sont deux points de X, la *pseudo-distance de Kobayashi* entre p et q est le nombre réel positif

$$d_X^K(p,q) = \inf\left\{\int_0^1 k_X(\dot\gamma(t))dt \,;\, \gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ chemin } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux reliant } p \text{ à } q\right\}.$$

On dit alors qu'une variété est *hyperbolique au sens de Kobayashi* si la pseudo-distance d_X^K est une *distance*, c'est-à-dire si elle sépare les points.

On montre facilement que si une variété est hyperbolique au sens de Kobayashi, elle l'est au sens de Brody. En effet, deux points quelconques d'une courbe entière tracée sur X ne sont pas séparés par d_X^K. La réciproque est vraie dans le cas des variétés compactes, comme le montre Brody [Bro78].

Il est utile d'introduire des notions plus faibles d'hyperbolicité, *modulo un sous-ensemble* $Z \subset X$, comme suit :

Définition 0.1.4. Soit X une variété complexe.

1. On dit que X est Brody hyperbolique *modulo un sous-ensemble* Z, si pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$, f a son image incluse dans Z.
2. On dit que X est Kobayashi hyperbolique *modulo un sous-ensemble* Z, si d_X^K sépare tout couple de points qui ne sont pas tous deux éléments de Z.

0.1.2 La conjecture de Green-Griffiths-Lang

La raison principale de l'intérêt lié aux notions d'hyperbolicité précédentes provient de la conjecture de Green-Griffiths-Lang, qui prédit que les variétés projectives de type général devraient avoir de fortes propriétés d'hyperbolicité. Rappelons brièvement quelles sont les variétés que l'on qualifie *de type général*. Leur définition repose sur le théorème suivant.

Théorème 0.1.5. *Soit X une variété projective lisse de dimension n. Il existe un unique élément $k \in \{-\infty\} \cup [\![0, n]\!]$ tel qu'il existe des constantes non nulles C, C', avec $C'm^k \leq h^0\left(X, K_X^{\otimes m}\right) \leq Cm^k$ pour tout m tel que $h^0(X, K_X^{\otimes m}) \neq 0$. On appelle cet élément* dimension de Kodaira *de X, et on le note $\kappa(X)$.*

On dit alors qu'une variété projective lisse X est de *type général* si $\kappa(X) = \dim X$. On vérifie sans peine que cette notion est invariante par transformations birationnelles. Ceci permet de définir les variétés projectives *singulières* de type général comme celles dont les résolutions lisses sont de type général.

Pour simplifier la caractérisation des variétés de type général, il est utile d'introduire la notion de positivité suivante pour un fibré en droites donné :

Définition 0.1.6. Soit X une variété complexe compacte de dimension n. On dit qu'un fibré en droites $L \longrightarrow X$ est *big* si on a la croissance maximale $h^0(X, L^{\otimes m}) \geq Cm^n$, pour un certain $C > 0$.

Les variétés projectives de type général sont alors celles dont le fibré canonique est *big*. Pour quantifier le caractère big d'un fibré en droites donné, il est utile de recourir à la définition suivante.

Définition 0.1.7. Soit X une variété complexe compacte de dimension n, et soit $L \longrightarrow X$ un fibré en droites. Le *volume* de L est le nombre réel positif

$$\mathrm{vol}(L) = \limsup_{m \longrightarrow +\infty} \frac{h^0(X, L^{\otimes m})}{m^n / n!}.$$

On peut montrer alors que le fibré L est big si et seulement si $\mathrm{vol}(L) > 0$, la limite supérieure précédente étant alors une limite (voir [Laz04a]).

La géométrie des variétés de type général est encore très mal connue, même en dimension 2. La conjecture de Green-Griffiths-Lang ([GG80, Lan87]) est une tentative de mieux comprendre celle-ci.

Conjecture 0.1.8 (Green-Griffiths [GG80], Lang [Lan87])**.** *Soit X une variété complexe projective lisse. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est de type général.

(ii) X est Kobayashi hyperbolique modulo un sous-ensemble analytique strict $Z \subsetneq X$;

(iii) X est Brody hyperbolique modulo un sous-ensemble analytique strict $Z \subsetneq X$.

La conjecture de Green-Griffiths-Lang implique une autre conjecture plus faible, énoncée par Lang, qui peut se formuler uniquement dans le langage de la géométrie algébrique.

Conjecture 0.1.9 (Lang [Lan87])**.** *Soit X une variété complexe projective lisse, de type général. Alors il existe un sous-ensemble algébrique strict $Z \subsetneq X$, contenant toutes les sous-variétés (éventuellement singulières) de X qui ne sont pas de type général.*

On dira qu'une variété complexe X est *algébriquement hyperbolique* modulo un sous-ensemble $Z \subset X$, si toute sous-variété (éventuellement singulière) de X non-incluse dans Z est de type général.

Les conjectures 0.1.8 et 0.1.9 sont encore largement ouvertes, malgré de nombreux résultats positifs portant sur des exemples particuliers de variétés complexes. Dans la suite, on étudiera ces conjectures dans le cas des compactifications de quotients de domaines symétriques bornés, et notamment de la boule.

0.2 Compactifications de quotients de domaines symétriques bornés

On va maintenant détailler quelques résultats concernant les compactifications de quotients de domaines symétriques bornés, issus de [AMRT10].

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un *domaine symétrique borné*, et soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ un *réseau*, c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que $\Gamma\backslash\Omega$ soit de volume fini. Supposons que Γ satisfasse plusieurs conditions arithmétiques en faisant un réseau que l'on qualifie d'*arithmétique* et *net* (on pourra se référer à [AMRT10] pour une définition précise de ces notions). Si le réseau Γ est déjà arithmétique, quitte à remplacer Γ par un de ses sous-groupes d'indice fini, on peut le supposer net (voir [Bor69]). Remarquons que si le domaine Ω est irréductible et de rang supérieur ou égal à 2, alors tout réseau $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ est arithmétique, par un théorème de Margulis [Mar84].

Alors, sous ces conditions, le travail d'Ash, Mumford, Rapoport et Tai [AMRT10] permet de construire une compactification de la variété complexe $X = \Gamma\backslash\Omega$ en lui ajoutant un certain bord D, pour obtenir une variété complexe lisse $\overline{X}$, que l'on peut supposer projective, et sur laquelle D est un diviseur à croisements normaux simples. La construction de [AMRT10] fournit en principe une description explicite d'un voisinage euclidien de D, en termes d'ouverts euclidiens dans certaines variétés toriques. Ces compactifications sont ainsi des exemples particuliers de *compactifications toroïdales*.

Il semble très naturel d'étudier l'hyperbolicité complexe de ces compactifications toroïdales particulières. En effet, l'intérieur $X = \Gamma\backslash\Omega$ est déjà hyperbolique dans les sens de Kobayashi et Brody (pour l'hyperbolicité de Brody, c'est une application du théorème de Liouville, l'hyperbolicité de Kobayashi provient du lemme d'Ahlfors-Schwarz, voir [Dem12]). Par ailleurs, dans le cas où X est compact, on voit facilement que X est de type général. En effet, la métrique de Bergman induit une métrique à courbure positive sur le fibré canonique K_X, ce dernier est donc ample, et donc *big*. Dans ce cas, X satisfait alors la conjecture de Green-Griffiths-Lang, avec $Z = \varnothing$. Par ailleurs, comme remarqué par Mok (voir par exemple [Mok07]), les propriétés de décroissance de la courbure sur les sous-variétés, obtenues par Griffiths [Gri69], impliquent que la métrique induite sur le fibré canonique d'une sous-variété lisse de X est à courbure négative, donc le fibré canonique d'une telle sous-variété est ample. Toutes les sous-variétés lisses de X sont donc de type général.

Le cas d'une compactification toroïdale $\overline{X}$ apparaît donc comme une perturbation de cette situation compacte : on peut se demander si le bord D se comporte comme le lieu Z des conjectures 0.1.8 et 0.1.9. La question qui se pose naturellement est donc la suivante :

Question. Étant donné une compactification toroïdale de type général $\overline{X}$,

1. $\overline{X}$ est-elle Brody (ou Kobayashi) hyperbolique modulo D ?
2. les sous-variétés singulières $V \subset \overline{X}$ qui ne sont pas contenues dans D sont-elles toutes de type général ?

Une autre raison, plus théorique, pour l'étude de ces quotients de domaines symétriques bornés, vient du fait que beaucoup d'entre eux sont des espaces de modules pour certaines familles de variétés complexes. L'exemple le plus simple est celui de l'espace de modules des courbes elliptiques, qui est un quotient du disque unité Δ par le réseau $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, et dont la compactification toroïdale est $\mathbb{P}^1$. On peut généraliser cet exemple en considérant les variétés $\mathcal{A}_g(n)$, qui paramètrent les familles de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g avec une structure de niveau n, et qui s'obtiennent des quotients du demi-plan de Siegel généralisé $\mathcal{H}_g$.

Ainsi, étudier l'hyperbolicité de ces compactifications revient à étudier les restrictions sur les variétés supportant une telle famille de variétés complexes, ou, dualement, à étudier les familles qui peuvent être supportées sur une variété bien connue (par exemple $\mathbb{C}$), ce qui est déjà une question intéressante en soi.

Remarquons que la conjecture de Green-Griffiths-Lang, restreinte aux compactifications toroïdales, n'est pas vide en général : en effet, d'après le résultat suivant de Mumford [Mum77], on sait que beaucoup de ces compactifications sont de type général.

Théorème 0.2.1 (Mumford [Mum77])**.** *Soit Ω un domaine symétrique borné, et soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ un réseau arithmétique net. En outre, pour tout $\Gamma' < \Gamma$ d'indice fini suffisamment élevé, les compactifications toroïdales de $\Gamma' \backslash \Omega$ sont de type général.*

Par ailleurs, Mumford montre aussi que si $\overline{X}$ est une compactification toroïdale d'un quotient $\Gamma \backslash \Omega$ du type construit dans [AMRT10], alors $\overline{X}$ est de type log-général ; ceci signifie que le fibré canonique logarithmique $\mathcal{O}(K_{\overline{X}} + D)$ est big, où D est le bord de $\overline{X}$.

Si l'on s'autorise à prendre des sous-groupes du réseau Γ considéré, un certain nombre de travaux récents fournissent des réponses partielles à la question précédente. Nadel [Nad89] a ainsi montré que quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini assez grand, toute compactification toroïdale de $\Gamma \backslash \Omega$ est *Brody hyperbolique* modulo son bord. Le résultat plus précis suivant, concernant l'hyperbolicité de Kobayashi modulo le bord, a été démontré par Rousseau :

Théorème 0.2.2 (Rousseau [Rou15])**.** *Soit Ω un domaine symétrique borné, et soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ un réseau arithmétique net. Alors, pour tout sous-groupe $\Gamma' < \Gamma$ d'indice fini assez grand, toute compactification toroïdale $\overline{\Gamma' \backslash \Omega}$ est Kobayashi hyperbolique modulo son bord.*

Par ailleurs, l'hyperbolicité algébrique de ces compactifications a été étudiée par Brunebarbe, qui a démontré le résultat frappant suivant.

Théorème 0.2.3 (Brunebarbe [Bru16a])**.** *Soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ un réseau arithmétique. Alors pour tout sous-groupe d'indice fini assez grand $\Gamma' < \Gamma$, les sous-variétés de $\overline{\Gamma' \backslash \Omega}$ qui ne sont pas incluses dans le bord sont de type général.*

En fait, Brunebarbe montre que les résolutions des singularités des variétés V mentionnées ci-dessus, ont fibré cotangent *big*. Comme on l'expliquera dans la suite, un théorème de Campana et Păun [CP15] (voir le théorème 0.3.8) implique que ces variétés sont de type général. La preuve du théorème 0.2.2 par Rousseau consiste à construire des métriques sur $\overline{X'}$ permettant de contrôler la métrique de Kobayashi. Par ailleurs, la démonstration de Brunebarbe fait appel à des notions avancées de la théorie des variations de structures de Hodge. Mentionnons dès à présent qu'un des objectifs principaux de cette thèse a été d'obtenir des versions effectives du théorème 0.2.3 pour des domaines symétriques bornés spécifiques, en utilisant une approche métrique proche de celle de [Rou15]. Ce travail sera présenté aux chapitres 2 et 4.

Dans le cas où le domaine symétrique borné est la boule unité $\mathbb{B}^n$, plusieurs travaux récents permettent de préciser la géométrie birationnelle des compactifications toroïdales $\overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ construites dans [AMRT10] (ou dans [Mok12], sous des hypothèses plus faibles sur le groupe Γ, comme on le verra au chapitre 2).

Di Cerbo et Di Cerbo ont ainsi montré [CC15a] que si $n \geq 3$, alors le fibré canonique $K_{\overline{X}}$ des compactifications construites dans [Mok12] est *nef*. Par ailleurs, Bakker et Tsimerman montrent dans [BT15] que $\overline{X}$ est de type général dès que $n \geq 4$. En utilisant les résultats de [CC15b], ils obtiennent aussi le fait marquant suivant.

Théorème 0.2.4 ([BT15])**.** *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale du type construit dans [Mok12]. Alors si $\lambda \in \left]0, \frac{n+1}{2\pi}\right[$, le $\mathbb{R}$-diviseur $K_{\overline{X}} + (1-\lambda)D$ est ample. En particulier, si $n \geq 6$, $K_{\overline{X}}$ est ample.*

Pour toutes les raisons précédentes, les compactifications toroïdales se présentent ainsi comme des objets naturels pour appliquer les méthodes développées actuellement pour s'approcher des conjectures 0.1.8 et 0.1.9, et que l'on va à présent introduire.

0.3 Différentielles symétriques et différentielles de jets

0.3.1 Définitions

L'étude des différentielles de jets sur une variété complexe est une approche de la conjecture 0.1.8 qui a suscité beaucoup d'efforts de recherche depuis les travaux fondateurs de Green et Griffiths [GG80]. On renvoie à [Dem12] pour une présentation approfondie de ces notions, que nous allons décrire brièvement.

Définition 0.3.1. Soit X une variété complexe lisse, et soit $k \geq 1$ un entier. Le *fibré des k-jets de Green-Griffiths* est la variété

$$J_k^{GG}(X) = \{\text{germes d'applications holomorphes } f : \Delta \longrightarrow X\}\big/{\sim_k},$$

où $f \sim_k g$ si et seulement si $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ pour tout $j \leq k$, c'est-à-dire si f et g ont le même développement de Taylor à l'ordre k.

On munit naturellement $J_k^{GG}(X)$ d'une structure de variété complexe, ce qui en fait un fibré en $\mathbb{C}^{nk}$-espaces vectoriels au moyen de la projection $[f] \in J_k^{GG} \longmapsto f(0) \in X$.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit naturellement sur $J_k^{GG}(X)$ par reparamétrisation, c'est-à-dire comme $(\lambda, [f]) \mapsto [t \mapsto f(\lambda t)]$. Cette action de groupe préserve les fibres de la projection $J_k^{GG}(X) \longrightarrow X$. On définit alors l'*espace de jets de Green-Griffiths* X_k^{GG} comme étant le quotient de $J_k^{GG}(X)$ par cette action de $\mathbb{C}^*$.

Sur X, on peut aussi définir, pour tous entiers $k \geq 1$ et $m \geq 1$, le *fibré des différentielles de jets de Green-Griffiths* d'ordre k et de degré m, que l'on notera $E_{k,m}^{GG}\Omega_X$, Les sections de ces fibrés correspondent à des équations différentielles holomorphes de degré m opérant sur les k-jets sur X. L'*algèbre des différentielles de jets de Green-Griffiths d'ordre* k est alors le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X = \bigoplus_{m \geq 0} E_{k,m}^{GG}\Omega_X,$$

avec $E_{k,0}^{GG}\Omega_X = \mathcal{O}_X$, et où la loi multiplicative est définie naturellement. Ce faisceau d'algèbre est relié aux variétés X_k^{GG} de la façon suivante :

Proposition 0.3.2. *Pour tout k, on a une identification naturelle*

$$X_k^{GG} \cong \mathbf{Proj}_X\left(E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X\right),$$

où $\mathbf{Proj}_X$ désigne le foncteur de projectivisation schématique.

Les propriétés classiques des schémas projectivisés impliquent alors que X_k^{GG} est muni de faisceaux de $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}$-modules tautologiques $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, tels que

$$E_{k,m}^{GG}\Omega_X = (\pi_k)_* \mathcal{O}_k^{GG}(m)$$

pour tout m, où $\pi_k : X_k^{GG} \longrightarrow X$ est la projection naturelle. Remarquons que le faisceau $\mathcal{O}(m)$ n'est pas inversible en général ; c'est cependant le cas si m est divisible par $\mathrm{ppcm}(1, 2, ..., k)$, puisque l'algèbre $E_{k,m}^{GG}\Omega_X$ est engendrée en degré $\mathrm{ppcm}(1, 2, ..., k)$, mais pas nécessairement en degré 1. Comme on le verra au chapitre 3, il est sans doute plus judicieux de voir X_k^{GG} comme un champ de Deligne-Mumford dans la catégorie des espaces complexes analytiques (on pourra se référer à [BN06] pour une introduction à ces objets). Ainsi, $\mathcal{O}_k^{GG}(1)$ s'interprète comme un fibré en droites orbifold sur ce champ analytique. Pour ne pas alourdir l'exposé, jusqu'à la fin de l'introduction, on ne considèrera le faisceau $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ que dans les cas où m est assez divisible ; on pourra aussi voir $\mathcal{O}_k^{GG}(1)$ comme un $\mathbb{Q}$-fibré en droites, défini comme $\frac{1}{m}\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, avec $m = \mathrm{ppcm}(1, 2, ..., k)$.

Exemple 0.3.3. Dans le cas où $k = 1$, les définitions précédentes se ramènent à une situation bien connue. En effet, les 1-jets s'identifient naturellement à des vecteurs tangents à X, ce qui conduit aux identifications $J_1^{GG}(X) \cong T_X$ et $X_1^{GG} \cong \mathbb{P}(T_X)$, où l'on adopte la convention des projectivisés en droites. Par ailleurs, le faisceau $\mathcal{O}_1^{GG}(1)$ s'identifie au fibré en droites tautologique naturel $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X)$, et pour tout m, on a un isomorphisme $\mathrm{Sym}^m\Omega_X \cong E_{1,m}^{GG}\Omega_X$.

0.3.2 Théorèmes d'annulation fondamentaux. Existence d'équations différentielles de jets

La motivation principale de l'étude des différentielles de jets pour les questions liées à l'hyperbolicité complexe provient du théorème fondamental suivant, dû à Siu et Yeung ([SY96, SY97])

Théorème 0.3.4 (Siu-Yeung [SY96, SY97]). *Soit X une variété projective lisse, et soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ une courbe entière. Alors, pour tout fibré en droites ample A sur X, et pour toute section globale $P \in H^0(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1})$, l'équation différentielle associée à P annule identiquement f i.e. $P(f, f', ..., f^{(k)}) = 0$.*

La démonstration de ce théorème fait appel à des outils de théorie de Nevanlinna ; on en trouvera une présentation détaillée dans [Dem97]. Ce résultat permet *a priori* de trouver des restrictions sur l'image des courbes entières tracées sur une variété donnée, et constitue donc un outil important dans l'étude de la conjecture de Green-Griffiths-Lang.

Par ailleurs, Campana et Păun prouvent dans [CP15] un résultat qui peut s'interpréter comme une version algébrique du théorème 0.3.4, et qui est particulièrement adapté à l'étude de la conjecture de Lang 0.1.9.

Théorème 0.3.5 (Campana-Păun [CP15]). *Soit X une variété projective lisse, et A un fibré en droites ample sur X. Supposons que pour un certain $k \geq 1$, il existe une section non nulle $P \in H^0\left(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}\right)$. Alors X est de type général.*

De fait, on voit que si $V \subset X$ est une sous-variété lisse qui n'est pas de type général, alors toutes les sections de $H^0\left(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}\right)$, doivent s'annuler en restriction à V, ce qui justifie l'interprétation du théorème 0.3.5 comme une version algébrique du théorème 0.3.4.

Lorsque X est une variété de type général, l'existence d'équations différentielles de jets de grand degré dans les espaces $H^0\left(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}\right)$ est assurée par le théorème suivant de Demailly, qui peut se voir comme une réciproque au théorème 0.3.5 :

Théorème 0.3.6 (Demailly [Dem11]). *Soit X une variété projective de type général. Alors pour $k \gg 1$, et pour m assez divisible, le fibré en droites $\mathcal{O}^{GG}_k(m)$ est big, i.e. pour m divisible par* $\mathrm{ppcm}(1, ..., k)$, *on a la croissance maximale*

$$h^0(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X) = h^0(X^{GG}_k, \mathcal{O}^{GG}_k(m)) \geq Cm^{n+nk-1},$$

avec $C > 0$. De manière équivalente, si A est un diviseur ample sur X et si $m \gg k \gg 0$, avec m assez divisible, on a

$$H^0\left(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}\right) \neq 0.$$

Pour démontrer ce résultat, Demailly utilise une certaine famille de métriques $(h_t)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[\setminus\{0\}}$ sur les espaces de jets $J^{GG}_k(X)$, construites naturellement à partir d'une certaine métrique singulière adéquate h sur T_X. Cette famille de métriques lui permet d'obtenir des métriques singulières $\widetilde{h_t}$ sur les fibrés en droites $\mathcal{O}^{GG}_k(m)$, quand m est assez divisible. Il applique alors les inégalités de Morse holomorphes singulières, dues à Bonavero [Bon98], qui fournissent pour tout $t \neq 0$ une minoration

$$\mathrm{vol}\left(\mathcal{O}^{GG}_k(m)\right) \geq \int_{X^{GG}_k} \mathbb{1}_{X^{GG}_k(i\Theta(\widetilde{h_t}),\leq 1)} \left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widetilde{h_t})\right)^{n+nk-1}, \tag{1}$$

où $n = \dim X$, et $\mathbb{1}_{X^{GG}_k(\Theta(h_t),\leq 1)}$ est la fonction indicatrice des points de X^{GG}_k où $\Theta(\widetilde{h_t})$ est de signature $(n, 0)$ ou $(n-1, 1)$. La suite de la preuve consiste à faire dégénérer les métriques (h_t) vers une métrique singulière h_0, et d'estimer le comportement asymptotique du membre de droite de (1) quand $t \longrightarrow 0$. Demailly arrive ainsi à la minoration suivante

$$\mathrm{vol}\left(\mathcal{O}^{GG}_k(m)\right) \geq \frac{(\log k)^n}{n!(k!)^n} \left(\int_X \mathbb{1}_{X(i\Theta(\det h^*_0),\leq 1)} \left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\det h^*_0)\right)^n - O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right), \tag{2}$$

Sous l'hypothèse que K_X est big, on peut, en utilisant des décompositions de Zariski approchées, trouver une métrique singulière sur X rendant positive l'intégrale de droite. Si l'on fait tendre k vers $+\infty$, cela donne le résultat.

0.3.3 Différentielles symétriques

Une grande partie des résultats de cette thèse provient de la spécialisation du théorème 0.3.5 à l'ordre 1. On peut alors réécrire ce théorème d'une manière plus élégante en généralisant la notion de fibré « big » au cas des fibrés vectoriels de la façon suivante :

Définition 0.3.7. Soit X une variété projective complexe. On dit qu'un fibré vectoriel $E \longrightarrow X$ est *big* si le fibré tautologique $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(E^*)$ est big. Ceci revient à demander que l'on ait la croissance maximale suivante : $h^0(X, \mathrm{Sym}^m E) \geq C m^{n+\mathrm{rg} E-1}$, avec $C > 0$.

A l'ordre 1, le théorème 0.3.5 se reformule donc ainsi :

Théorème 0.3.8 (Campana-Păun [CP15])**.** *Soit X une variété projective lisse. Supposons que le fibré cotangent Ω_X soit big. Alors K_X est big, i.e. X est de type général.*

Ce théorème peut s'utiliser pour étudier le type d'une sous-variété V d'une variété X donnée, pour laquelle on dispose d'informations sur la positivité de Ω_X. En effet, notamment lorsque V est lisse, les fibrés Ω_V et Ω_X sont fonctoriellement mieux reliés que ne le sont K_V et K_X. Par exemple, une métrique à courbure négative sur T_X se restreindra en une métrique à courbure négative sur T_V, ce qui donnera potentiellement des informations sur le caractère big de Ω_V, et donc sur celui de K_V par le théorème 0.3.8.

0.4 Présentation des résultats de la thèse

0.4.1 Un critère métrique de positivité du fibré cotangent

Pour montrer qu'une variété donnée X est de type général en appliquant le théorème 0.3.8, il suffit de démontrer que le fibré $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X)$ est big. Les méthodes métriques que nous présenterons dans la suite seront basées sur le théorème suivant de Boucksom [Bou02], qui a été généralisé au cas des variétés complexes non nécessairement kählériennes par Popovici [Pop08].

Théorème 0.4.1 (Boucksom [Bou02], Popovici [Pop08])**.** *Soit X une variété complexe compacte de dimension n, et soit $L \longrightarrow X$ un fibré en droites. Supposons que L admette une métrique singulière h à courbure positive au sens des courants. Alors*

$$\mathrm{vol}(L) \geq \int_X \left(\frac{i}{2\pi} \Theta(h)^{ac} \right)^n,$$

où $i\Theta(h)^{ac}$ dénote la partie absolument continue du courant positif $i\Theta(h)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. En particulier, si cette dernière quantité est strictement positive, alors L est big.

On peut alors facilement formuler un critère pour le caractère big du fibré cotangent d'une variété X donnée. En fait, on peut même plus généralement déterminer des conditions pour que les fibrés cotangent et cotangent logarithmique d'une paire logarithmique lisse donnée soient big. Pour cela, il suffit de déterminer des conditions pour que le fibré tautologique de $\mathbb{P}(T_X)$ (ou $\mathbb{P}(T_X(-\log D)$ dans le cas d'une paire), satisfasse les hypothèses du théorème 0.4.1. Si l'on s'intéresse en particulier à des métriques singulières sur $\mathcal{O}(1)$ induites par une métrique singulière sur Ω_X (ou $\Omega_X(\log D)$), on en arrive naturellement à considérer d'autres notions de positivité faible pour un fibré vectoriel, introduites par Viehweg [Vie83] et Nakayama [Nak04], et que l'on présentera plus précisément au chapitre 1.

Le résultat auxquelles aboutissent ces considérations est alors le critère suivant, qui provient essentiellement de l'article [BC17].

Théorème 0.4.2. *Soit X une variété complexe compacte, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. On suppose que X admet une métrique singulière h à courbure semi-négative (voir [PT14]) sur $T_{X \setminus D}$, qui provienne d'une métrique hermitienne lisse sur un ouvert de Zariski $U \subset X \setminus D$, et dont la courbure sectionnelle holomorphe H soit négative sur U, majorée uniformément par une constante négative $-A$. Alors*

(i) le fibré canonique $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big ; en particulier, X est une variété de Moishezon ;

(ii) la métrique h s'étend en une métrique singulière à courbure semi-négative sur $T_X(-\log D)$, et le fibré $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Viehweg [Vie83]. Plus précisément, si X est projective, $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Nakayama [Nak04] en tout point de U ;

Si, en outre, il existe un point $x \in U$ et un vecteur tangent $v \in T_{U,x} \setminus \{0\}$, tel que h ait sa courbure bisectionnelle $B(\cdot,\cdot)$ définie négative en v i.e.

$$\forall w \in T_{U,x} \setminus \{0\}, \, B(v,w) < 0,$$

alors

(iii) $\Omega_X(\log D)$ est big.

Enfin, si en plus des trois hypothèses précédentes, h, vue comme métrique sur le fibré tangent T_X, est localement bornée, alors

(iv) le fibré Ω_X est big et faiblement positif au sens de Viehweg ;

(v) le fibré $\mathcal{O}(K_X)$ est big.

Les notions de courbure bisectionnelle et de courbure sectionnelle holomorphe seront introduites au chapitre 1. On y rappellera aussi les définitions de la faible positivité au sens de Viehweg et de Nakayama, qui sont des notions de positivité pour les fibrés vectoriels sur une variété projective (voir la définition 1.3.1) ; plus généralement, on peut donner un sens à la positivité de Viehweg sur une variété de Moishezon.

Remarquons que si l'on suppose que X est projective, la première conclusion du théorème est en fait conséquence de la deuxième, puisque le déterminant d'un fibré big et faiblement positif sur une variété projective est lui-même big. On pourrait aussi faire appel à la généralisation au cas logarithmique du théorème 0.3.8, qui implique aussi que $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big. Cependant, la démonstration du caractère big de $\mathcal{O}(K_X + D)$ que l'on présentera au chapitre 1 sera directe, et ne fera appel à aucun de ces deux résultats.

Pour démontrer le théorème 0.4.2, on montre que sous les hypothèses indiquées, la métrique h induit sur chaque fibré vectoriel en question une métrique singulière ayant les bonnes propriétés de courbure positive. Le caractère big des fibrés $\mathcal{O}(K_X+D)$ et $\mathcal{O}(K_X)$ peut ainsi se prouver en appliquant le théorème 0.4.1 aux métriques induites sur ces deux fibrés. De même, on montre le caractère big de $\Omega_X(\log D)$ (resp. Ω_X) en appliquant ce même théorème à la métrique induite sur le fibré tautologique $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X(-\log D))$ (resp. $\mathbb{P}(T_X)$). Les positivités faibles au sens de Viehweg et de Nakayama se prouvent en utilisant un critère métrique dû à Păun et Takayama [PT14] (voir le théorème 1.4.4) .

0.4.2 Variétés supportant une variation de structures de Hodge

Avant de voir comment le critère précédent s'applique au cas des compactifications de quotients de domaines symétriques bornés, on va présenter des résultats issus d'un travail en commun avec Y. Brunebarbe [BC17], et qui sont des applications directes du théorème 0.4.2.

Ces résultats consistent en des théorèmes d'hyperbolicité pour les variétés supportant des variations de structures de Hodge (VSH) complexes polarisées. Ce travail peut en fait être relié à une conjecture de Viehweg concernant le type des variétés supportant une famille de variétés polarisées.

La conjecture initiale de Viehweg (voir [Vie01] et [VZ02]) affirmait que si une variété complexe projective X munie d'un diviseur à croisements normaux simples D, supporte sur $X \setminus D$ une famille de variétés complexes *canoniquement polarisées*, à variation maximale, alors le diviseur $K_X + D$ est big. Autrement dit, la variété $X \smallsetminus D$ est de type *log-général*.

Cette conjecture a été démontrée par Campana et Păun dans [CP15], qui utilisent les travaux de Viehweg et Zuo [VZ02], ainsi qu'une version logarithmique du théorème 0.3.8 pour démontrer que $K_X + D$ est big sous les hypothèses précédentes. Par ailleurs, il a aussi été récemment montré par To et Yeung [TY15], qu'une variété quasi-projective supportant une telle famille de variétés complexes canoniquement polarisées, à variation maximale, est Kobayashi hyperbolique.

Il est naturel d'étendre la conjecture de Viehweg à d'autres types de familles de variétés complexes. Comme remarqué par Zuo [Zuo00], si la famille à laquelle on s'intéresse satisfait le théorème de Torelli local, on peut aborder le problème du point de vue de la théorie des variations de structures de Hodge. Dans la suite, on s'intéressera au cas des familles polarisées de variétés à fibré canonique trivial, qui satisfont bien le théorème de Torelli local. L'étude se ramène ainsi à celles des variétés ouvertes de la forme $X \smallsetminus D$, supportant une variation de structures de Hodge complexe, à variation maximale.

Le résultat principal de [BC17] est alors le suivant.

Théorème 0.4.3 ([BC17])**.** *Soit X une variété complexe compacte et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $X \smallsetminus D$ supporte une variation de Hodge complexe polarisée à variation maximale. Alors*

(i) le fibré canonique logarithmique $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big. En particulier, X est une variété de Moishezon, et $X \smallsetminus D$ est de type log-général.

(ii) le fibré cotangent logarithmique $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Viehweg [Vie83], et big.

Ce théorème est en fait une conséquence presque immédiate du théorème 0.4.2 et de travaux de Griffiths et Schmid [GS69], Peters [Pet90] et Lu [Lu99]. Les travaux de ces derniers impliquent en effet que toute paire (X, D) comme dans le théorème 0.4.3 admet en fait une métrique singulière sur $X \smallsetminus D$ satisfaisant les hypothèses impliquant les points (i), (ii) et (iii) du théorème 0.4.2.

Le théorème 0.4.3 généralise des résultats précédents de Zuo [Zuo00] et Brunebarbe [Bru16b], qui arrivaient au même résultat, sous l'hypothèse additionnelle que X est projective. Par ailleurs, les preuves de [Zuo00] et [Bru16b] utilisent des résultats difficiles concernant les dégénérescences de variations de structures de Hodge, et ont besoin de prouver tout d'abord que le résultat est vrai si l'on suppose que la monodromie de la VSH est *unipotente* autour du bord. Au contraire, la preuve du théorème 0.4.3 n'utilise que les propriétés de courbure négative des domaines des périodes associé à une variation de structures de Hodge.

Un premier corollaire intéressant au théorème 0.4.3 est que sous les hypothèses précédentes, X est nécessairement une variété de Moishezon. En particulier, si X est kählérienne, elle est alors nécessairement projective.

Corollaire 0.4.4 ([BC17])**.** *Soit X une variété complexe compacte. Supposons qu'un certain ouvert de Zariski de X supporte une VSH complexe polarisée à variation maximale. Alors X est une variété de Moishezon.*

La variété $\mathbb{C}$ n'est pas de type log-général, sa seule compactification étant $\mathbb{P}^1$. Elle ne peut donc pas supporter de VSH complexe polarisée non constante, ce qui redonne un résultat de Griffiths et Schmid [GS69]. En fait, le théorème 0.4.3 donne le résultat d'hyperbolicité plus général suivant.

Corollaire 0.4.5. *Soit U une variété algébrique complexe supportant une VSH complexe polarisée $\mathcal{E}$, et soit* $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$ *le lieu des points de U où l'application des périodes de $\mathcal{E}$ n'est pas immersive. Alors*

(i) (Griffiths-Schmid) toute courbe entière tracée sur U est incluse dans $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$ *;*

(ii) toute sous-variété (éventuellement singulière) de U qui n'est pas de type log-général est incluse dans $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$.

Comme indiqué précédemment, le théorème 0.4.3 peut s'appliquer aux familles de variétés à canonique trivial en utilisant le théorème de Torelli local. On a alors le résultat suivant, valable pour une variété X non nécessairement projective.

Corollaire 0.4.6. *Soit X une variété complexe compacte, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $U = X \smallsetminus D$ supporte une famille polarisée de variétés à canonique trivial, à variation maximale. Alors $K_X + D$ est big, et U est de type log-général.*

En particulier, toute famille polarisée de variétés à canonique trivial supportée sur $\mathbb{C}$ est isotriviale, i.e. les éléments d'une telle famille sont isomorphes deux-à-deux.

0.4.3 Application du critère au cas des compactifications de quotients de la boule

On va maintenant revenir à l'étude de l'hyperbolicité des compactifications de quotients de domaines symétriques bornés ; dans un premier temps, on va voir comment on peut appliquer le théorème 0.4.2 au cas des compactifications de quotients de la boule.

Pour l'étude des quotients lisses de domaines symétriques bornés, il est commode de présenter une version du théorème 0.4.2 dans lequel on suppose que la métrique initiale est *lisse*. On aboutit ainsi au critère suivant, qui est une généralisation directe d'un résultat de Brunebarbe, Klingler et Totaro [BKT13] au cas non compact :

Théorème 0.4.7 ([Cad16])**.** *Soit X une variété complexe, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $X \smallsetminus D$ soit muni d'une métrique lisse kählérienne, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *h a courbure sectionnelle holomorphe H négative, bornée supérieurement par une constante $-A < 0$;*
2. *h a courbure bisectionnelle B négative ou nulle : pour tous u, v tangents à $X \smallsetminus D$ en un certain point, on a $B(u, v) \leq 0$;*

alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_X(\log D)$ est big. En outre, si

3. *h, vue comme une métrique sur le fibré tangent T_X, est localement bornée,*

alors Ω_X est big.

On peut en fait présenter une version un peu plus générale du théorème 0.4.7 ne faisant pas appel à l'hypothèse que h est kählérienne (voir le théorème 2.2.1 et les remarques suivantes).

La situation des compactifications de quotients de domaines symétriques bornées est particulièrement adaptée à l'emploi du critère précédent. Si l'on considère une compactification toroïdale quelconque $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\Omega}$, la métrique de Bergman sur $X = \Gamma\backslash\Omega$ satisfait les hypothèses du théorème 0.4.7. Ceci donne une nouvelle preuve du résultat suivant, initialement démontré par Brunebarbe en utilisant la théorie des variations de structures de Hodge :

Théorème 0.4.8 (Brunebarbe [Bru16b])**.** *Soit $\overline{X} = X \cup D$ une compactification toroïdale d'un quotient de domaine symétrique borné. Alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ est big.*

Au chapitre 2, on expliquera en détail comment on peut appliquer le théorème 0.4.7 pour donner une version effective du théorème 0.2.3 dans le cadre des compactifications de quotients de $\mathbb{B}^n$.

Considérons une sous-variété $V \subset \overline{X}$, où $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$. Pour montrer que V est de type général, il suffit d'appliquer le théorème 0.4.7 à une métrique définie sur une résolution des singularités $\widetilde{V}$ de V. Dans la suite, on s'intéressera à des métriques s'écrivant sous la forme

$$\widetilde{h} = \|s\|^{2\beta} \, h_{\mathrm{Berg}}\big|_{V_{\mathrm{lisse}}},$$

où s est une section d'une certaine puissance d'un $\mathbb{Q}$-fibré $K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$, et où $\|\cdot\|$ est la norme naturelle sur la puissance de $\mathcal{O}\left(K_{\overline{X}} + D\right)$ adéquate. On peut alors déterminer pour quels α, s'il existe un s comme précédemment, on peut trouver β tel que la métrique $\widetilde{h}$ satisfasse les hypothèses du théorème 0.4.7 (ou plutôt de sa version plus générale, le théorème 2.2.1, voire du théorème 0.4.2). Ceci donne le résultat suivant.

Théorème 0.4.9. *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$. Si le fibré*

$$L = K_{\overline{X}} + D - (n+1)D$$

est big, alors toute sous-variété $V \subset \overline{X}$ telle que $V \not\subset D \cup \mathbb{B}^+(L)$ est de type général. Plus précisément, toute résolution des singularités de V a son fibré cotangent big.

Ici, $\mathbb{B}^+(L)$ désigne le lieu de base augmenté du fibré en droites L. En utilisant les résultats de Bakker et Tsimerman [BT15], on peut déterminer pour quels λ le fibré $K_{\overline{X}} + (1-\lambda)D$ est sans point base, si l'on remplace $\overline{X}$ par un de ses revêtements ramifiés. Ceci mène au résultat suivant.

Théorème 0.4.10 ([Cad16]). *Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale d'un quotient $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}^n$, comme construit dans [Mok12], et soit $\overline{X'} \xrightarrow{\pi} \overline{X}$ un revêtement ramifié fini, étale sur l'intérieur X. Supposons que π ramifie à des ordres supérieurs à un certain entier l sur chaque composante de bord. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *$n = 4$ et $l \geq 6$,*
2. *$n \in \{2,3\} \cup [\![5, +\infty]\!]$ et $l \geq 7$.*

Alors toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$ non incluse dans le bord, est de type général. Plus précisément, toute résolution des singularités $\widetilde{V} \longrightarrow V$ a son fibré cotangent $\Omega_{\widetilde{V}}$ big.

Les méthodes métriques précédentes permettent aussi d'étudier le caractère nef des fibrés cotangent et cotangent logarithmiques sur une compactification toroïdale d'un quotient de $\mathbb{B}^n$. Tout d'abord, les résultats de [Bou02] permettent d'estimer les nombres d'intersections d'une courbe $C \subset \mathbb{P}(T_{\overline{X}}(-\log D))$ avec le fibré tautologique. Le résultat suivant s'ensuit naturellement.

Théorème 0.4.11 ([Cad16]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale, du type construit dans [Mok12]. Alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ est nef.*

On peut alors étudier le caractère nef du fibré cotangent $\Omega_{\overline{X}}$ en résolvant la transformation birationnelle $\mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}\right) \dashrightarrow \mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}(-\log D)\right)$, et en utilisant cette résolution pour relier les deux fibrés tautologiques sur chacun des fibrés projectivisés. Ceci fournit alors des identités de nombres d'intersections, qui peuvent être utilisées pour montrer le résultat suivant :

Théorème 0.4.12 ([Cad16]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ et soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié fini étale sur X, ramifiant à des ordres supérieurs ou égaux à 7 sur chaque composante de bord. Alors $\Omega_{\overline{X'}}$ est nef.*

Ce dernier résultat peut être utilisé pour donner une version plus précise du théorème 0.4.10, dans le cas des sous-variétés *immergées*. Rappelons qu'un fibré vectoriel E est dit ample modulo un sous-espace analytique Z, si une certaine puissance de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(E^*)$ induit une application rationnelle qui est un plongement en dehors de Z. D'après un résultat de Boucksom, Cacciola et Lopez [BCL14], cela revient à demander que $\mathbb{P}\left(E^*|_Z\right)$ soit inclus dans le lieu de base augmenté $\mathbb{B}^+(\mathcal{O}(1))$.

Corollaire 0.4.13 ([Cad16]). *Sous les hypothèses du Théorème 0.4.10, toute sous-variété immergée $V \xrightarrow{f} \overline{X}$, si elle est non incluse dans le bord, a son fibré cotangent Ω_V ample modulo le bord $f^{-1}(D)$.*

0.4.4 Compactifications de quotients singuliers de domaines symétriques bornés

Les méthodes métriques précédentes peuvent aussi donner des résultats similaires au théorème 0.4.9 dans le cas des compactifications de quotients *singuliers* de domaines symétriques bornés.

Dans un travail en collaboration avec E. Rousseau et B. Taji, on s'est intéressé au cas des compactifications de quotients à singularités cycliques. Plus précisément, la situation considérée est la suivante. On se donne un quotient de domaine symétrique borné $X = \Gamma\backslash\Omega$ par un réseau arithmétique, de sorte que

1. X n'a qu'un nombre fini de singularités quotients cycliques ponctuelles $p_1, ..., p_m$, de groupes d'isotropies G_i ;
2. X admet une compactification toroïdale $\overline{X} = X \sqcup D$, où $D \subset \overline{X}$ est un diviseur à croisements normaux simples.

Comme exemple de telle variété, on peut citer le cas des variétés de Hilbert modulaires, qui sont des quotients du polydisque Δ^n par un certain réseau isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers d'un certain corps de nombres totalement réel K. On peut alors utiliser les résultats de Baily et Borel [BB66], pour obtenir une compactification X^* d'un tel quotient $X = \Gamma\backslash\Delta^n$, en lui ajoutant un nombre fini de cusps. On peut alors obtenir une compactification toroïdale de X en prenant une résolution projective de ces cusps $\overline{X} \longrightarrow X^*$.

Revenons à présent au cas général, et considérons une résolution des singularités $\widetilde{X} \longrightarrow \overline{X}$, avec diviseur exceptionnel E_i au-dessus de chaque p_i. On introduit alors le $\mathbb{Q}$-diviseur $\widetilde{\Delta} = \sum_i \left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right) E_i$, $E = \sum_i E_i$, et $\widetilde{D} = \pi^* D$.

En appliquant le théorème du polydisque au domaine Ω (voir [Wol72] et [Mok89]), on montre que la courbure sectionnelle holomorphe de la métrique h_{Berg} est comprise entre deux constantes négatives de la forme $-C$ et $-\frac{C}{r}$, où r est le rang de Ω, et $C > 0$ est une constante dépendant du domaine et de la normalisation choisie sur h_{Berg}. On normalise à présent la métrique de Bergman sur Ω, de manière à avoir $\mathrm{Ric}(h_{Berg}) = -\omega_{\mathrm{Berg}}$. Soit $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$ de sorte que le maximum de la courbure sectionnelle holomorphe de h_{Berg} soit égal à $-\eta$.

On peut alors obtenir une généralisation d'un résultat de Nadel [Nad89] dans ce cadre singulier.

Théorème 0.4.14. *[CRT17] On considère le $\mathbb{Q}$-fibré en droites suivant*

$$L = \pi^* K_{\overline{X}} + \widetilde{D} - \frac{1}{\eta}\left(\widetilde{D} + \widetilde{\Delta}\right).$$

Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{X}$ a son image incluse dans $\mathbb{B}^+(L) \cup \widetilde{D} \cup E$, où $\mathbb{B}^+(L)$ désigne le lieu de base augmenté du $\mathbb{Q}$-fibré L.

Pour démontrer ce résultat, on suppose par l'absurde qu'il existe une courbe entière dont l'image n'est pas incluse dans le lieu en question. Comme précédemment, on peut trouver une section s d'une certaine puissance d'un fibré $\pi^* K_{\overline{X}} + (1-\alpha)\left(\widetilde{D} + \widetilde{\Delta}\right)$, pour un $\alpha > 0$ bien choisi. On peut alors produire une métrique singulière $\widetilde{h} = \|s\|^{2\beta} f^* h_{\mathrm{Berg}}$ sur $\mathbb{C}$, telle que $-\mathrm{Ric}(\widetilde{h}) \geq C\omega_{\widetilde{h}}$ au sens des courants. Ceci est en fait absurde par le lemme d'Ahlfors-Schwarz (voir [Dem12]).

Par ailleurs, si l'on revient au cas où $\Omega = \mathbb{B}^n$, on peut donner une généralisation du théorème 0.4.9 dans le cas des quotients singuliers de $\mathbb{B}^n$.

Théorème 0.4.15 ([CRT17])**.** *Supposons que $\Omega = \mathbb{B}^n$. Alors si le $\mathbb{Q}$-fibré en droites*

$$L = \pi^* K_{\overline{X}} + \widetilde{D} - (n+1)\left[\widetilde{D} + \widetilde{\Delta}\right]$$

est big, alors toute sous-variété $V \subset \widetilde{X}$ telle que $V \not\subset \mathbb{B}^+(L) \cup \widetilde{D} \cup E$, est de type général. Plus précisément, toute résolution des singularités de V a son fibré cotangent big.

Ce résultat se prouve de manière tout à fait similaire au théorème 0.4.9. La difficulté supplémentaire vient du fait qu'il faut contrôler la divergence de la métrique de Bergman au voisinage du diviseur exceptionnel E, de façon à obtenir une métrique $\widetilde{h}$ sur $T_{\widetilde{V}}$ qui soit localement bornée, où $\widetilde{V}$ est une résolution des singularités d'une sous-variété $V \subset \widetilde{X}$.

0.4.5 Différentielles de jets d'ordre supérieur sur les quotients de la boule

On va maintenant s'intéresser au cas des différentielles de jets d'ordre supérieur sur une compactification toroïdale lisse $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$, comme construite dans [Mok12]. Dans ce cadre, on va donner une version effective du théorème 0.3.6 de Demailly [Dem11].

Pour ce faire, on va voir que l'existence de la famille de métrique $(h_t)_t$ mentionnée à la section 0.3.2 repose implicitement sur une construction géométrique très simple, qui consiste à déformer les X_k^{GG} en des *fibrés projectivisés à poids*. Une large part du chapitre 3 sera consacrée à la description de cette déformation.

En fait, l'algèbre $E_{k,m}^{GG}\Omega_X$ est munie d'une filtration naturelle, définie à partir des ordres de différentiation apparaissant dans les équations différentielles de jets. En utilisant la déformation à l'algèbre graduée de Rees (cf. [BG96]), on peut déformer les espaces de jets X_k^{GG} en les espaces

$$\mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)}\right) = T_X \oplus \ \dots\ \oplus T_X \big/ \mathbb{C}^*,$$

où $\mathbb{C}^*$ agit sur $T_X \oplus \dots \oplus T_X$ par $\lambda \cdot (v_1, \dots, v_k) = \left(\lambda v_1, \lambda^2 v_2, \dots, \lambda^k v_k\right)$. On qualifiera la variété $\mathbb{P}(T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)})$ de *fibré projectivisé de la somme directe à poids* $T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)}$. Cette variété est munie de faisceaux tautologiques $\mathcal{O}(m)$, pour $m \geq 1$. Plus précisément, on arrive au résultat suivant.

Proposition 0.4.16. *Soit X une variété complexe projective lisse, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe une variété $\mathcal{X}_k^{GG}$ munie d'une projection $\mathcal{X}_k^{GG} \longrightarrow X \times \mathbb{C}$, et de faisceaux tautologiques $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)$ sur $\mathcal{X}_k^{GG}$, tels que :*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{X}_k^{GG}\big|_{X \times \{\lambda\}} \cong X_k^{GG}$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)\Big|_{X \times \{\lambda\}}$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(m)$ pour tout m ;*
2. *la fibre $\mathcal{X}_k^{GG}\big|_{X \times \{0\}}$ s'identifie à $\mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)}\right)$, et pour tout m, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)\Big|_{X \times \{0\}}$ s'identifie au faisceau tautologique $\mathcal{O}(m)$.*

On peut réinterpréter la famille de métriques apparaissant dans [Dem11] à la lumière de cette déformation des espaces X_k^{GG}. En fait, le raisonnement de Demailly peut se voir comme la construction d'une métrique $\widetilde{h}$ sur un certain $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)$, pour m assez divisible. Les métriques $\widetilde{h}_t$ sont alors les restrictions de cette métriques aux sous-variétés $X \times \{t\} \subset X \times \mathbb{C}$. A la limite $t \longrightarrow 0$, les métriques $\widetilde{h}_t$ convergent alors en norme $\mathcal{C}^\infty$ vers une métrique naturelle sur le faisceau tautologique $\mathcal{O}(m) \longrightarrow \mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)}\right)$. Les calculs de [Dem11] tirent alors profit du fait que cette dernière métrique a une expression simple en termes d'une certaine métrique sur le fibré tangent T_X.

De la même façon, l'approche algébrique que l'on va présenter ici revient à substituer à l'étude des faisceaux tautologiques $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, celle des faisceaux $\mathcal{O}(m) \longrightarrow \mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \dots \oplus T_X^{(k)}\right)$, qui est *a priori* plus simple à comprendre. A titre d'exemple, mentionnons la propriété suivante, qui se démontre très simplement à partir des considérations précédentes.

Proposition 0.4.17. *Si le fibré cotangent Ω_X est ample (resp. nef), et si m est assez divisible, alors le fibré en droites $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ est ample (resp. nef).*

Par ailleurs, on dispose du théorème de Riemann-Roch asymptotique usuel pour le fibré ordinaire $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, dès que m est assez divisible. On obtient ainsi, pour m assez divisible,

$$\chi\left(X_k^{GG}, \mathcal{O}_k^{GG}(ml)\right) = \left(\int_{X_k^{GG}} c_1 \mathcal{O}(m)^{n+nk-1}\right) \frac{l^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!} + O(l^{n+nk-2}).$$

Cependant, puisque X_k^{GG} et $\mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right)$ font partie d'une même famille plate, l'intégrale ci-dessus est égale à $\int_{\mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right)} c_1 \mathcal{O}(m)^{n+nk-1}$. Comme dans le cas sans poids, cette dernière intégrale peut se calculer à partir de la classe de Chern totale de T_X. On obtient en fait le résultat suivant, qui reformule et précise une part des calculs de Green et Griffiths dans [GG80]. Ici, on note $A^*(X)$ l'anneau de Chow de X.

Proposition 0.4.18. *Pour tout k, il existe une* classe de Segre

$$s_\bullet\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right) \in A^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

s'exprimant explicitement en fonction de la classe de Chern totale $c_\bullet(T_X)$, et telle que

$$\chi\left(X_k^{GG}, \mathcal{O}_k^{GG}(m)\right) = s_n\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right) \frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!} + O(m^{n+nk-2}) \tag{3}$$

si m est assez divisible.

Les calculs de Green et Griffiths dans [GG80] reviennent en fait à donner une expression asymptotique de $s_n\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right)$ quand $k \longrightarrow +\infty$, sous la forme

$$s_n\left(T_X^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_X^{(k)}\right) = \frac{c_1(K_X)^n}{n!\,(k!)^n}\left[\,(\log k)^n + O\left((\log k)^{n-1}\right)\right].$$

L'expression (3) présente l'avantage d'être valide à n'importe quel ordre k.

En fait, on verra dans la suite comment on peut associer une classe de Segre à n'importe quelle *somme directe à poids* de fibrés vectoriels. On montrera que ces classes satisfont une formule de Whitney, qui permet d'expliciter ces classes en fonction des classes de Segre des fibrés vectoriels choisis.

On peut maintenant appliquer ce qui précède pour étudier le caractère big des faisceaux $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, quand la variété considérée est une compactification toroïdale lisse d'un quotient de la boule $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$. Pour ce faire, on va utiliser la notion d'équations différentielles de jets *logarithmiques*, que l'on définit comme des équations différentielles de jets à coefficients méromorphes, avec des pôles d'ordres adaptés le long du bord. On commence par estimer la croissance du nombre d'équations différentielles de jets *logarithmiques* sur $\overline{X}$, puis on va majorer le nombre de conditions d'annulations au bord nécessaires pour qu'une différentielle de jets logarithmique soit en fait une différentielle de jets ordinaire.

Fixons $k, m \in \mathbb{N}^*$. Une équation différentielle de jets ordinaire étant en particulier une équation différentielle de jets logarithmique, on a alors la suite exacte de faisceaux suivante :

$$0 \longrightarrow E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}} \longrightarrow E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D) \longrightarrow \mathcal{Q}_{k,m} \longrightarrow 0, \tag{4}$$

où $\mathcal{Q}_{k,m}$ est un certain faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules, supporté sur D. Ceci conduit à l'inégalité

$$h^0\left(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}\right) \geq h^0\left(E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) - h^0\left(X, \mathcal{Q}_{k,m}\right).$$

Pour minorer $h^0\left(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right)$, on remarque que la proposition 0.4.18 s'étend sans difficulté au cadre logarithmique. Par la proposition 0.4.11 $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ est nef. On peut alors utiliser la version logarithmique de la proposition 0.4.17 pour voir que $h^0\left(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right)$ et $\chi\left(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right)$ ont les mêmes ordres de croissance, par une propriété classique des fibrés en droites nefs. On déduit de tout cela que si m est assez divisible, on a :

$$h^0(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)) = s_n\left(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)}\right) \frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)} + O(m^{n+nk-2}).$$

La classe de Segre intervenant dans cette dernière équation peut se calculer explicitement, ce qui aboutit à l'expression combinatoire suivante.

Proposition 0.4.19 ([Cad17]). *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a, si m est assez divisible,*

$$h^0\left(\overline{X}, E^{GG}_{k,m}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) = \frac{1}{(k!)^n}\left[\frac{(K_{\overline{X}}+D)^n}{(n+1)^n}\sum_{\{u_1\leq\ldots\leq u_n\}\subset S_{k,n}}\frac{1}{u_1\ldots u_n}\right]\frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!}+O(m^{n+nk-2}),$$

où $S_{k,n}$ est l'ensemble ordonné $\{1_1 < \ldots < 1_{n+1} < 2_1 < \ldots < k_1 < \ldots < k_{n+1}\}$. Dans la formule précédente, le calcul des fractions $\frac{1}{u_1\ldots u_n}$ se fait en oubliant les indices des éléments de $S_{k,n}$.

Il ne reste plus qu'à majorer le terme $h^0(\mathcal{Q}_{k,m})$. Pour ce faire, on exhibe une filtration adéquate $F^\bullet\mathcal{Q}_{k,m}$, dont les termes gradués peuvent être vus comme des faisceaux de $\mathcal{O}_D$-modules localement libres. On utilise ensuite la majoration $h^0(\overline{X},\mathcal{Q}_{k,m}) \leq \sum_i h^0\left(D, \mathrm{Gr}^F_i\mathcal{Q}_{k,m}\right)$, ce qui aboutit au résultat suivant.

$$h^0\left(\mathcal{Q}_{k,m}\right) \leq \frac{-(-D)^n}{(k!)^n}\left[\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_n\leq k}\frac{1}{i_1\ldots i_n}\right]\frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!}+O\left(m^{n+nk-2}\right). \tag{5}$$

En combinant cette formule avec la proposition 0.4.19, on obtient donc une minoration asymptotique pour $h^0\left(\overline{X}, E^{GG}_{k,m}\Omega_{\overline{X}}\right)$. Pour formuler cette minoration, introduisons la notion de volume suivante pour les fibrés de jets $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$, de manière similaire à la définition 0.1.7. On pose

$$\mathrm{vol}\left(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}\right) = \limsup_{\substack{m\longrightarrow+\infty \\ \mathrm{ppcm}(1,\ldots,k)\mid m}}\frac{h^0\left(\overline{X}, E^{GG}_{k,m}\Omega_{\overline{X}}\right)}{m^{n+nk-1}/(n+nk-1)!}.$$

Théorème 0.4.20 ([Cad17]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale lisse, du type construit dans [Mok12]. On a alors la borne inférieure suivante sur le volume de $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$, valable pour tout k :*

$$\mathrm{vol}\left(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}\right) \geq \frac{1}{(k!)^n}\left[\frac{(K_{\overline{X}}+D)^n}{(n+1)^n}\left(\sum_{\{u_1\leq\ldots\leq u_n\}\subset S_{k,n}}\frac{1}{u_1\ldots u_n}\right)+(-D)^n\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_n\leq k}\frac{1}{i_1\ldots i_n}\right] \tag{6}$$

où $S_{k,n} = \{1_1 < \ldots 1_{n+1} < 2_1 < \ldots < 2_{n+1} < \ldots < k_1 < \ldots < k_{n+1}\}$.

Pour donner une version effective du théorème 0.3.6 dans notre cadre, il suffit, lorsque $\overline{X}$ est de type général, de déterminer un entier k_0 pour lequel le membre de droite est strictement positif, ce qui peut se faire en appliquant les résultats de Bakker et Tsimerman [BT15]. Lorsque $n \geq 4$, on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 0.4.21 ([Cad17]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale, du type construit dans [Mok12]. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, sous l'une des hypothèses suivantes*

1. *$n \in [\![4,5]\!]$ et $k > e^{-\gamma}\, e^{-(-D)^n(n-2)n!+1}$;*
2. *$n \geq 6$ et $k > e^{-\gamma}\, e^{\frac{\frac{\pi^2}{6}(n-2)n!+1}{\frac{n+1}{2\pi}-1}}$*

et si m est assez divisible, le fibré en droites $\mathcal{O}^{GG}_{\overline{X}_k}(m)$ est big. Ici, γ représente la constante d'Euler-Mascheroni.

0.4.6 Hyperbolicité de quotients de domaines symétriques bornés généraux

Dans le dernier chapitre, on montrera comment les approches métriques des chapitres 1 et 2 permettent de donner une démonstration unifiée des théorèmes 0.2.3 et 0.2.2, portant respectivement sur l'hyperbolicité algébrique, et l'hyperbolicité de Kobayashi des compactifications toroïdales. L'approche que l'on va présenter est purement métrique, dans l'esprit de [Rou15], et permet en principe d'obtenir des résultats effectifs sur tout domaine symétrique borné, moyennant un calcul de certaines constantes.

Avant de présenter les résultats qui seront démontrés au chapitre 4, on a besoin d'introduire quelques définitions supplémentaires, généralisant la notion d'hyperbolicité de Kobayashi, et que l'on pourra retrouver dans [Dem12].

Définition 0.4.22. Soit X une variété complexe, et soit $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ un p-vecteur décomposé, basé en un certain point $x \in X$. La *pseudo-métrique de Kobayashi-Eisenman* évaluée en ξ est le nombre réel

$$\mathbf{e}^p(\xi) = \inf\left\{\lambda > 0 \,;\, \exists f : \mathbb{B}^p \longrightarrow X,\ f(0) = x,\ \lambda f_*(\tau_p) = \xi\right\},$$

où $\tau_p = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p \in \Lambda^p T_{\mathbb{B}^p,0}$ est le p-vecteur standard basé en $0 \in \mathbb{B}^p$.

Lorsque $p = 1$, cette pseudo-métrique coïncide avec la pseudo-métrique de Kobayashi. En utilisant cette pseudo-métrique de Kobayashi-Eisenman, on peut former diverses notions de *p-mesure hyperbolicité*. Dans la suite, on considérera la version forte suivante.

Définition 0.4.23. Soit X une variété complexe, et soit $Z \subset X$ un sous-ensemble. On dit que X est *infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo Z* s'il existe une fonction continue et strictement positive υ sur l'espace de tous les p-vecteurs décomposés sur $X \smallsetminus Z$, telle que pour tout tel p-vecteur ξ, on ait

$$\mathbf{e}^p(\xi) \geq \upsilon(\xi).$$

On considère maintenant un domaine symétrique borné Ω de dimension n, et un réseau arithmétique net $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$. Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale de $X = {}^{\Gamma}\backslash^{\Omega}$, de bord D. On normalise la métrique de Bergman h_{Berg} sur Ω de sorte $\mathrm{Ric}(h_{\mathrm{Berg}}) = -\omega_{\mathrm{Berg}}$, où ω_{Berg} est la forme de Kähler associée à h_{Berg}. Notons $-\eta$ le maximum de la courbure sectionnelle holomorphe sous cette normalisation.

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On va montrer au chapitre 4 qu'il existe un certain nombre rationnel $\alpha_p > 0$, tel si le $\mathbb{Q}$-diviseur $L = K_{\overline{X}} + (1 - \alpha_p)D$ est effectif, alors $\overline{X}$ est p-mesure hyperbolique modulo $D \cup \mathbb{B}(L)$, et en outre, toutes les sous-variétés de $\overline{X}$, non incluses dans $D \cup \mathbb{B}(L)$, et de dimension supérieure à p, sont de type général. Expliquons comment l'on peut prouver ce deuxième point.

Soit $V \subset \overline{X}$ une sous-variété telle que $V \notin D \cup \mathbb{B}(L)$, et $\dim(V) \geq p$. Alors, si $\widetilde{V}$ est une résolution des singularités de V, la métrique de Bergman restreinte à V, induit une métrique singulière h_0 sur $K^*_{\widetilde{V}}$: cette dernière métrique est bornée sur les points s'envoyant dans X, mais peut diverger au voisinage du bord. Aux points où V est lisse, un calcul simple montre que la courbure de h_0, qui n'est autre que la courbure de Ricci de $h_{\mathrm{Berg}}|_V$, est bornée supérieurement de la façon suivante :

$$i\Theta(h_0) = \mathrm{Ric}(\,h_{\mathrm{Berg}}|_V\,) \leq -C_p\ \omega_{\mathrm{Berg}}|_V\,.$$

Par ailleurs, la constante C_p intervenant ici ne dépend que de p et du domaine Ω.

A présent, puisque $V \notin \mathbb{B}(L)$, il existe une section $s \in H^0\left(X, m\left(K_{\overline{X}} + (1 - \alpha_p)D\right)\right)$, pour m assez grand, telle que s ne s'annule pas identiquement sur V. Alors, en suivant la méthode utilisée au chapitre 2, on forme la métrique singulière suivante sur $K^*_{\widetilde{V}}$:

$$\widetilde{h} = ||s||^{2\beta} h_0,$$

où s est vue comme une section de $\mathcal{O}\left(m(K_{\overline{X}} + D)\right)$. Comme au chapitre 2, on montre que si α_p a une valeur adéquate, on peut prendre β telle que la courbure du dual $\widetilde{h}^*$ de cette métrique singulière soit strictement positive au sens des courants. On peut alors lui appliquer le théorème 0.4.1, pour en déduire que $K_{\widetilde{V}}$ est *big*, et pour obtenir en outre une minoration du volume de $K_{\widetilde{V}}$.

De même, on peut construire des métriques similaires sur les images de boules $f : \mathbb{B}^p \longrightarrow \overline{X}$, telles qu'il existe $s \in H^0\left(\overline{X}, m\left((K_{\overline{X}} + D) - \alpha D\right)\right)$, avec $f^*s \neq 0$. Si α est bien choisi, en utilisant le lemme d'Ahlfors-Schwarz, on peut obtenir une contrainte sur la norme de $f_*(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p)$. Ceci permet de montrer que $\overline{X}$ est infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo le lieu des zéros de ces sections s.

Le résultat principal auquel aboutissent ces considérations, et qui sera démontré au chapitre 4, est le suivant.

Théorème 0.4.24. *Il existe une suite de constantes $\eta = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_n = 1$, dépendant uniquement de Ω, telles que le résultat suivant soit valide.*

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Supposons qu'il existe un nombre rationnel $\alpha > \frac{1}{C_p}$ tel que le $\mathbb{Q}$-diviseur $L = K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D$ soit effectif. Alors,

(i) Toute sous-variété $V \subset \overline{X}$, telle que $V \not\subset \mathbb{B}(L) \cup D$, et telle que $\dim(V) \geq p$*, est de type général. Plus précisément, pour toute telle variété, et pour toute résolution des singularités $\widetilde{V} \longrightarrow V$, on a*

$$\mathrm{vol}(K_{\widetilde{V}}) \geq \left(\frac{C_p - \frac{1}{\alpha}}{2\pi} \right)^{\dim V} \int_{V_{\mathrm{lisse}} \smallsetminus D} (\omega_{\mathrm{Berg}}|_V)^{\dim V}$$

(ii) $\overline{X}$ est infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo $\mathbb{B}(L) \cup D$.

Ici, on a noté $\mathbb{B}(L) = \bigcap_{m \geq 1} \mathrm{Bs}\,(L^{\otimes m})$ le lieu de base stable de L. Le deuxième énoncé, concernant la p-mesure hyperbolicité de $\overline{X}$ modulo $\mathbb{B}(L) \cup D$, généralise un théorème de Nadel [Nad89], qui a traité le cas de l'hyperbolicité de Brody de $\overline{X}$ modulo un sous-ensemble, sous l'hypothèse que $L = K_{\overline{X}} + (1 - \frac{1}{\eta})D$ est big. Cependant, comme nous l'a indiqué Y. Brunebarbe, le lieu de base $\mathbb{B}(L)$ (ou plutôt, le lieu de base augmenté $\mathbb{B}^+(L)$) est incorrectement omis dans [Nad89].

D'après un théorème de Hwang et To [HT06], il existe toujours un nombre $\alpha_{\mathrm{base}} \geq 2 + \binom{n+1}{2}$ tel que $K_{\overline{X}} + (1 - \alpha_{\mathrm{base}})D$ soit sans point base en dehors de D. Ainsi, si l'on considère un revêtement ramifié $f : \overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres supérieurs à l au-dessus de chaque composante de bord, on peut tirer en arrière les sections des puissances de $K_{\overline{X}} + (1 - \alpha_{\mathrm{base}})D$, pour obtenir des sections de puissances de $L' = K_{\overline{X}} + (1 - l\alpha_{\mathrm{base}})D$, qui sera donc sans point base en dehors du bord D'. Si l est assez grand, le fibré L' satisfait alors les hypothèses du théorème 0.4.24 pour $p = 1$, avec $\mathbb{B}(L') \subset D'$. Ceci permet donc de donner la version effective suivante des théorèmes 0.2.3 et 0.2.2 :

Théorème 0.4.25 (Rousseau [Rou15], Brunebarbe [Bru16a])**.** *Si l est un entier tel que $l \geq \frac{1}{\alpha_{\mathrm{base}}\eta}$, alors l'assertion suivante est vérifiée. Soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres supérieurs à l sur chaque composante de bord. Alors $\overline{X'}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi modulo son bord D, et toute sous variété $V \subset \overline{X'}$ telle que $V \not\subset D'$, est de type général.*

Pour certains domaines particuliers, on peut donner des versions quantitatives plus précises des résultats précédents. En particulier, dans le cas de la boule $\mathbb{B}^n$, on montre facilement que $C_p = \frac{p+1}{n+1}$. Par ailleurs, d'après le théorème 0.2.4, on a dans ce cas $\alpha_{\mathrm{base}} \geq \frac{n+1}{2\pi}$. Ceci donne le théorème suivant.

Théorème 0.4.26. *Supposons que $\Omega = \mathbb{B}^n$. Soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur X, et ramifiant à des ordres supérieurs à un certain entier l sur chaque composante de bord. Soit $p = \lceil \frac{2\pi}{l} \rceil - 1$. Alors $\overline{X'}$ est infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo son bord D', et toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$, avec* $\dim V \geq p$ *et $V \not\subset D'$, est de type général.*

En particulier, en prenant $l = 1$, on obtient le corollaire suivant, qui restreint fortement la géométrie des sous-variétés d'un quotient de la boule.

Corollaire 0.4.27. *Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale d'un quotient de la boule complexe. Alors toute sous-variété $V \subset \overline{X}$ telle que* $\dim(V) \geq 6$ *et $V \not\subset D$, est de type général.*

Remarquons que si l'on admet la conjecture de Green-Griffiths-Lang 0.1.8, ce corollaire implique que la conjecture suivante doit être vraie.

Conjecture 0.4.28. *Soit $n \geq 6$, et soit $\overline{X} = \overline{\Gamma \backslash \mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale. Alors il existe un sous-ensemble analytique strict $\Sigma \subset \overline{X}$, avec* $\dim(\Sigma) \leq 5$*, tel que* $\mathrm{Exc}(\overline{X}) = D \cup \Sigma$ *contienne toutes les courbes entières et toutes les sous-variétés qui ne sont pas de type général.*

Le théorème 0.4.24 peut aussi s'appliquer aux variétés $\mathcal{A}_g(n)$, qui paramètrent les familles de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g avec une structure de niveau n. Celles-ci peuvent se voir comme des revêtements étales au-dessus de la variété $\mathcal{A}_g$, qui est le quotient du demi-plan généralisé de Siegel $\mathcal{H}_g$ par le réseau $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.

Alors, au niveau des compactifications toroïdales de ces variétés, on a un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur, $\overline{\mathcal{A}_g(n)} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}_g}$, ramifiant à des ordres supérieurs à n au dessus de chaque composante de bord. On peut alors appliquer le théorème 0.4.24 pour obtenir une version effective du théorème 0.4.25 dans ce cadre.

Théorème 0.4.29. *Soit $n > 6g$, et soit $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$ une compactification toroïdale, avec bord D. Alors $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$ est Kobayashi hyperbolique modulo D, et toute sous-variété $V \subset \overline{\mathcal{A}_g(n)}$, avec $V \not\subset D$, est de type général.*

L'affirmation concernant l'hyperbolicité algébrique améliore un résultat dû à Brunebarbe [Bru16a]. Celle concernant l'hyperbolicité de Kobayashi a déjà été démontrée dans [Rou15].

Par ailleurs, si l'on s'autorise un lieu exceptionnel strict distinct de D, on peut en fait prendre une borne uniforme sur n, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 0.4.30. *Soit $n \geq 54$. Alors il existe un sous-ensemble analytique strict $Z \subsetneq \overline{\mathcal{A}_g(n)}$, tel que $\overline{\mathcal{A}(n)}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi modulo $Z \cup D$, et tel que toute sous-variété $V \subset \overline{\mathcal{A}_g(n)}$, avec $V \not\subset D \cup Z$, soit de type général.*

Chapitre 1

Un critère métrique de positivité du fibré cotangent d'une variété complexe compacte

1.1 Introduction

Le résultat principal de ce chapitre est un critère de positivité pour les fibrés cotangent et cotangent logarithmique d'une paire (X, D), où X est une variété complexe compacte lisse, et D est un diviseur à croisements normaux simples. Ce résultat servira de manière essentielle dans les chapitres suivants pour étudier la positivité du fibré cotangent des compactifications de quotients de domaines symétriques bornés.

Théorème 1.1.1. *Soit X une variété complexe compacte, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. On suppose que X admet une métrique singulière h semi-négative (voir [PT14]) sur $T_{X \setminus D}$, qui provienne d'une métrique hermitienne lisse sur un ouvert de Zariski $U \subset X \setminus D$, et dont la courbure sectionnelle holomorphe H soit négative sur U, majorée uniformément par une constante négative $-A$. Alors*

(i) le fibré canonique $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big ; en particulier, X est une variété de Moishezon ;

(ii) la métrique h s'étend en une métrique singulière à courbure semi-négative sur $T_X(-\log D)$, et le fibré $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Viehweg [Vie83]. Plus précisément, si X est projective, $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Nakayama [Nak04] en tout point de U ;

Si, en outre, il existe un point $x \in U$ et un vecteur tangent $v \in T_{U,x} \setminus \{0\}$, tel que h ait sa courbure bisectionnelle $B(\cdot,\cdot)$ définie négative en v, i.e.

$$\forall w \in T_{U,x} \setminus \{0\}, B(v, w) < 0,$$

alors

(iii) $\Omega_X(\log D)$ est big.

Enfin, si en plus des trois hypothèses précédentes, h, vue comme métrique sur le fibré tangent T_X, est localement bornée, alors

(iv) le fibré Ω_X est big et faiblement positif au sens de Viehweg ;

(v) le fibré $\mathcal{O}(K_X)$ est big.

Remarques. 1. Sur U, la *courbure sectionnelle holomorphe* H de la métrique h, évaluée en un vecteur complexe v, est la courbure sectionnelle du plan réel déterminé par v : on peut la calculer comme

$$H(v) = \frac{i\Theta(h)(v, \overline{v}, v, \overline{v})}{\|v\|^4}.$$

La courbure bisectionnelle $B(v,w)$ de deux vecteurs tangents v et w basés en un même point est

$$B(v,w) = \frac{i\Theta(h)\cdot(v,\overline{v},w,\overline{w})}{\|v\|^2\|w\|^2}.$$

2. On introduira à la section 1.4 la notion de *métrique singulière à courbure semi-négative* mentionnée dans les hypothèses du théorème. Les deux notions de *positivité faible* au sens de Nakayama et de Viehweg seront quant à elles introduites dans la section 1.3.
3. Par le lemme 1.1.2 ci-dessous (voir [BKT13]), on voit que si l'on suppose en outre que la métrique h du Théorème 2.2.1 est kählérienne au voisinage d'un point de U, alors l'hypothèse impliquant le point (iii) est automatiquement vérifiée.

Lemme 1.1.2 ([BKT13])**.** *Soit (X,h) une variété kählérienne. Supposons qu'en un point $p \in X$, la courbure sectionnelle holomorphe de h soit bornée supérieurement par une constante $-A$. Alors il existe un vecteur tangent $v_0 \in T_{X,p} \setminus \{0\}$, tel que pour tout $w \in T_{X,p} \setminus \{0\}$, la courbure bisectionnelle $B(v_0,w)$ soit bornée supérieurement par $-\frac{A}{2}$.*

Remarquons par ailleurs que si la variété X du théorème 1.1.1 est déjà supposée être de Moishezon, alors la conclusion (iii) implique la première conclusion (i), et la conclusion (iv) implique la conclusion (v). En effet, sur une variété de Moishezon, le déterminant d'un fibré big et faiblement positif est lui-même big, comme on le verra au lemme 1.3.3. Pour montrer chacune de ces deux implications, on pourrait aussi utiliser le théorème 0.3.8, ou sa version logarithmique ; celle-ci implique que si $D \subset X$ est un diviseur à croisements normaux simples sur une variété lisse projective, et si $\Omega_X(\log D)$ est big, alors le fibré $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big. L'extension de ces résultats de [CP15] au cas des variétés de Moishezon est immédiat, en utilisant une modification projective.

1.2 Rappels sur le lemme d'Ahlfors-Schwarz

Les méthodes métriques qui seront décrites dans la suite de ce chapitre, ainsi que dans les chapitres 2 et 4, reposent de manière fondamentale sur l'application du lemme d'Ahlfors-Schwarz, qui permet d'estimer la croissance des métriques à courbure sectionnelle holomorphe strictement négative.

On présente ici une version de ce lemme valable pour les métriques singulières à courbure négative, définies sur des disques ouverts de $\mathbb{C}$. On introduira au chapitre 4 une version de ce lemme portant sur les boules ouvertes complexes de dimension supérieure (voir le lemme 4.2.9).

Suivant [Dem92], on définit une métrique singulière ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ comme une métrique de la forme $\omega = e^{\psi} idt \wedge d\overline{t}$, avec $\psi \in L^1_{\text{loc}}(U, \mathbb{R})$. Le lemme d'Ahlfors-Schwarz en dimension 1 est alors le suivant.

Lemme 1.2.1 (Lemme d'Ahlfors-Schwarz en dimension 1, cf. [Dem12, lemme 3.2])**.** *Soit $\omega = e^{\psi} idt \wedge d\overline{t}$ une métrique hermitienne singulière définie sur un disque $D(0,R) \subset \mathbb{C}$, à courbure sectionelle holomorphe majorée par une certaine constante $-A > 0$ au sens des courants, c'est-à-dire telle que $i\partial\overline{\partial}\psi \geq A\omega$. En particulier, la fonction ψ est plurisousharmonique.*

Alors ω est majorée par la métrique de Poincaré sur $D(0,R)$, de la façon suivante :

$$\omega \leq \frac{2}{AR^2} \frac{idt \wedge d\overline{t}}{\left(1 - \frac{|t|^2}{R^2}\right)^2}. \tag{1.1}$$

En particulier, si $\omega(0) \neq 0$, alors on a $R \leq \sqrt{\frac{2}{Ae^{\psi(0)}}}$. Ainsi, sur $\mathbb{C}$, il n'existe pas de telle métrique singulière à courbure sectionnelle holomorphe majorée par une constante $-A$.

À présent, si ω est une métrique singulière définie sur le disque unité épointé $\Delta^* = D(0,1) \setminus \{0\}$, et si ω a sa courbure sectionnelle holomorphe majorée par une constante $-A$ au sens des courants, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\omega \leq C \frac{idt \wedge d\bar{t}}{|t|^2 |\log|t||^2}. \tag{1.2}$$

On pourra se référer à [Dem12] pour une preuve de la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence naturelle de la première, puisque le disque épointé Δ^*, muni de la métrique apparaissant dans le membre de droite de (1.2), est uniformisé par $D(0,1)$, muni du multiple adéquat de la métrique de Poincaré.

Ce lemme a plusieurs conséquences sur les propriétés de croissance des métriques singulières à courbure sectionnelle holomorphe négative, au voisinage d'un diviseur à croisements normaux simples. En fait, le lemme d'Ahlfors-Schwarz permet de contrôler facilement la croissance des métriques ayant des propriétés de courbure négative en restriction aux disques holomorphes. La proposition suivante fournit un exemple de métrique de ce type, que l'on rencontrera très fréquemment au cours des chapitres suivants.

Proposition 1.2.2. *Soit X une variété complexe, et soit $\Sigma \subset X$ un sous-ensemble analytique. Soit h une métrique hermitienne* lisse *sur $T|_{X\setminus D}$. On suppose que*

1. *h est à courbure sectionnelle holomorphe négative, bornée par une constante négative $-A$;*
2. *h, vue comme métrique sur T_X, est localement bornée sur X.*

Alors pour tout disque $\Delta \subset X$, avec $\Delta \notin \Sigma$, la métrique induite $h|_\Delta$, vue comme métrique hermitienne définie presque partout sur Δ, est de courbure négative au sens des courants, bornée supérieurement par $-A$.

Preuve. Soit $\Delta \subset X$ un disque holomorphe, avec $\Delta \notin \Sigma$. Écrivons $\left\|\frac{\partial}{\partial t}\right\|^2_{h|_\Delta} = e^\psi$, où t est une coordonnée locale sur Δ. Puisque la courbure sectionnelle holomorphe diminue en restriction aux sous-variétés, la métrique lisse $h|_{\Delta\setminus\Sigma}$ a courbure sectionnelle holomorphe négative, bornée supérieurement par $-A$. Ceci signifie que $i\partial\bar{\partial}\psi|_{\Delta\setminus\Sigma} \geq A\,\omega_{h|_{\Delta\setminus\Sigma}}$; en particulier, ψ est sous-harmonique sur Δ. Puisque h est localement bornée sur X, la fonction ψ est bornée supérieurement sur $\Delta \setminus \Sigma$. Par le théorème d'extension des fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement à travers les espaces analytiques, ceci implique que la fonction ψ admet une unique extension $\widetilde{\psi}$ à Δ, telle que $i\partial\bar{\partial}\widetilde{\psi} \geq A\,\omega_{h|_\Delta}$ au sens des courants. Ceci implique que la métrique $h|_\Delta$, qui est définie presque partout sur Δ, a courbure sectionnelle holomorphe majorée par $-A$ au sens des courants. □

On considère maintenant le polydisque unité $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$, muni des coordonnées $(z_1, ..., z_n)$. Soit $U = (\Delta^*)^m \times \Delta^{n-m}$ le complémentaire du diviseur $D = \{z_1...z_m = 0\}$. Avec les notations de [Mum77], on introduit la métrique de Poincaré $h^{(p)}$ sur U, définie par sa forme de Kähler

$$\omega^{(p)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{i}{2} dz_k \wedge d\bar{z}_k}{|z_k|^2 |\log|z_k||^2} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{i}{2} dz_k \wedge d\overline{z_k}.$$

Le lemme d'Ahlfors-Schwarz permet de borner la croissance des métriques singulières satisfaisant les hypothèses de la proposition précédente, de la façon suivante.

Proposition 1.2.3. *Soit h une métrique hermitienne sur le fibré vectoriel T_U, définie en tout point de U, mais non nécessairement lisse. On suppose que :*

1. *il existe un sous-ensemble analytique $\Sigma \subset U$ tel que $h_{U\setminus\Sigma}$ soit lisse, à courbure sectionnelle holomorphe négative, bornée par une constante $-A$;*
2. *h est localement bornée sur T_U ;*

3. pour tout $x \in \Sigma$, et pour toute section holomorphe s de T_U définie au voisinage de x, on a $\|s(x)\|_h \le \max_{B(x,r)\smallsetminus\Sigma} \|s\|_h$ pour tout $r > 0$ assez petit.

Alors h a croissance de Poincaré, i.e. pour tout $x \in D$, il existe une constante C_0 (dépendant seulement de A) telle que pour tous champs de vecteurs ξ_1 et ξ_2 sur U, on a

$$|h(\xi_1,\xi_2)|^2 \le C_0\, \omega^{(p)}(\xi_1,\xi_1)\, \omega^{(p)}(\xi_2,\xi_2). \tag{1.3}$$

en tout point *d'un voisinage de x.*

Preuve. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout champ de vecteur ξ, on a localement $\|\xi\|_h \le C\|\xi\|_{(p)}$. Par ailleurs, on peut clairement supposer que ξ est constant. Soit $\xi = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ un tel champs de vecteurs constant. Alors

$$\|\xi\|_h^2 \le n^2 \sum_j \left\| a_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right\|_h^2.$$

Ainsi, il suffit de prouver le résultat pour $\xi = \frac{\partial}{\partial z_j}$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. On suppose tout d'abord $j \in [\![1,m]\!]$. Soit $x_0 \in U \smallsetminus \Sigma$, et soit Δ le disque passant par x_0 et dirigé par $\frac{\partial}{\partial z_j}$. On a $\Delta \notin \Sigma$. Alors, par la proposition 1.2.2, la métrique h restreinte à Δ est à courbure négative au sens des courants, majorée par $-A$. On peut alors appliquer le lemme d'Ahlfors-Schwarz (1.2.1) pour obtenir que sur le disque Δ, on a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_j} \right\|_h (x) \le C_1 \frac{1}{|z_j|^2 |\log|z_j||^2},$$

sur U, pour un certain C_1 dépendant seulement de A, donc on a la majoration voulue au point x_0. Si $x_0 \in \Sigma$, on a alors la même majoration en x_0 par l'hypothèse 3.

De la même manière, si $j \in [\![m+1,n]\!]$ on voit grâce à (1.1) que $\left\|\frac{\partial}{\partial z_j}\right\|_h$ doit être borné supérieurement en tout point $x \in U \smallsetminus \Sigma$ comme

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_j} \right\|_h (x) \le C_2 \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \le \frac{C}{(1-B^2)^2},$$

avec C_2 dépendant seulement de A. Cette majoration devant aussi être satisfaite en tout point de Σ par l'hypothèse 3, ceci donne le résultat. □

Corollaire 1.2.4. *Soient Δ^n et $D \subset \Delta^n$ comme précédemment, et soit h une métrique hermitienne sur $T_{\Delta^n \smallsetminus D}$, satisfaisant les hypothèses de la proposition 1.2.3. Alors pour tout champ de vecteur ξ dans $T_X(-\log D)$, $\|\xi\|_h$ est bornée au voisinage de tout point de D.*

Preuve. Il suffit d'appliquer (1.3) aux vecteurs du repère canonique

$$\left(\left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)_{1 \le j \le m}, \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_{m \le j \le n} \right),$$

et de remarquer que $\omega^{(p)}$ est bornée sur ces vecteurs. □

1.3 Métriques singulières et positivité faible

On va maintenant introduire deux notions de positivité faible pour un fibré vectoriel (ou plus généralement, pour un faisceau cohérent sans torsion), dues à Viehweg [Vie83] et Nakayama [Nak04]. On pourra aussi se référer à [Pău16] et [PT14] pour un résumé de ces notions.

Si X est une variété complexe, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sans torsion sur X, on notera $\widehat{S}^m(\mathcal{F})$ le double-dual de la m-ième puissance symétrique de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.1. (voir [Vie83] et [Nak04]) Soit X une variété lisse projective, et soit $\mathcal{F} \longrightarrow X$ un faisceau cohérent sans torsion sur X, et soit A un diviseur ample sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est

(i) *faiblement positif au sens de Nakayama* en un point $x \in X$, si pour tout entier $a > 0$, il existe un entier $b > 0$ tel que le faisceau $\widehat{\mathrm{S}}^{ab}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(bA)$ soit engendré par ses sections globales en x ;

(ii) *faiblement positif au sens de Viehweg* s'il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset X$ tel que pour tout entier $a > 0$, il existe un entier $b > 0$ tel que le faisceau $\widehat{\mathrm{S}}^{ab}(E) \otimes \mathcal{O}(bA)$ soit engendré par ses sections globales au-dessus de U.

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du diviseur ample A choisi. Par ailleurs, la notion de faible positivité au sens de Viehweg s'étend naturellement au cas des variétés de Moishezon, comme suit.

Définition 1.3.2. Si X est une variété de Moishezon, on dit qu'un faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ sur X est faiblement positif au sens de Viehweg s'il existe une modification projective $X' \xrightarrow{\nu} X$ telle que $\nu^*\mathcal{F}$ soit faiblement positif au sens de Viehweg.

Le lemme suivant montre que, sur une variété de Moishezon, le déterminant d'un fibré vectoriel faiblement positif et big est toujours big.

Lemme 1.3.3. *Soit E un fibré vectoriel big et faiblement positif au sens de Viehweg sur une variété de Moishezon lisse X. Alors le fibré déterminant* $\det E$ *est big.*

Démonstration. Soit $\nu : X' \longrightarrow X$ une modification projective telle que ν^*E soit faiblement positif au sens de Viehweg dans le sens de la définition 1.3.1. Il suffit de montrer que $\nu^* \det E = \det(\nu^*E)$ est big. Puisque ν^*E est big, on voit donc qu'on peut supposer que X est projective.

On considère alors un diviseur ample A sur X. Puisque E est big, il existe un entier $k \geq 1$ et une application injective de $\mathcal{O}_X$-modules $0 \to \mathcal{O}(A) \to \mathrm{Sym}^k E$. Celle-ci peut être complétée en une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules $0 \to \mathcal{O}(A) \to \mathrm{Sym}^k E \to \mathcal{Q} \to 0$. Remarquons que le faisceau sans torsion $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}/\mathcal{Q}_{tor}$, en tant que quotient d'une puissance symétrique d'un fibré vectoriel faiblement positif au sens de Viehweg, est aussi faiblement positif au sens de Viehweg [Vie83, Lemme 1.4]. La suite exacte précédente implique alors que

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{Sym}^k E) &\simeq \mathcal{O}(A) \otimes \det Q \\ &\simeq \mathcal{O}(A) \otimes \det \mathcal{Q}_0 \otimes \det \mathcal{Q}_{tor}.\end{aligned}$$

Dans le dernier membre, $\mathcal{O}(A)$ est ample, $\det \mathcal{Q}_0$ est faiblement positif au sens de Viehweg, et $\det \mathcal{Q}_{tor}$ est effectif (voir [Kob87, proposition V.6.14]). Ce dernier membre représente donc un fibré en droites big et le membre de gauche peut s'exprimer comme un puissance tensorielle positive de $\det E$, ce qui donne le résultat. □

Enfin, si un faisceau sans torsion est faiblement positif au sens de Nakayama en tout point d'un ouvert de Zariski, il est en fait faiblement positif au sens de Viehweg, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.3.4. *Soit X une variété projective, et soit A un diviseur ample sur X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X. On suppose qu'il existe un ouvert de Zariski $U \subset X$ tel que $\mathcal{F}$ soit faiblement positif au sens de Nakayama en tout point de U. Alors $\mathcal{F}$ est faiblement positif au sens de Viehweg sur X.*

Démonstration. Soit $a > 0$ un entier positif. Par définition, pour tout $x \in U$, il existe un entier $b_x > 0$ tel que $\widehat{S}^{ab_x}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(b_x A)$ soit engendré par ses sections globales au-dessus de x. Il est alors clair que ce faisceau est engendré par ses sections globales au-dessus d'un ouvert de Zariski $U_x \subset U$ contenant x. Par quasi-compacité des ouverts pour la topologie de Zariski, il existe $x_1, \ldots, x_m \in U$, tels que $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. On vérifie alors facilement que si $b = b_1 \ldots b_n$, le faisceau $\widehat{S}^{ab}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(bA)$ est engendré par ses sections globales au-dessus de U. Ceci montre que $\mathcal{F}$ est faiblement positif au sens de Viehweg. □

1.4 Métriques hermitiennes singulières sur les fibrés vectoriels

Pour prouver le théorème 1.1.1, on va commencer par montrer que sous les premières hypothèses, le fibré vectoriel $\Omega_X(\log D)$ supporte une métrique singulière à courbure semi-négative. Rappelons à présent quelques définitions de base concernant ces métriques hermitiennes singulières, provenant de [BP08, Pău16, PT14, HPS16].

Définition 1.4.1. Un produit scalaire hermitien singulier sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V est une fonction $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et tout $v \in V$, et $\|0\| = 0$.
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ pour tout $v, w \in V$, où, par convention $\infty \leq \infty$.
3. $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2 \cdot \|v\|^2 + 2 \cdot \|w\|^2$ pour tout $v, w \in V$.

Soit V_0 (resp. V_{fin}) le sous-espace de V formé des vecteurs de norme nulle (resp. finie). Il provient facilement des axiomes que V_0 et V_{fin} sont des sous-espaces linéaires de V. Par définition, on dit que $\|\cdot\|$ est *défini positif* si $V_0 = 0$ et *fini* si $V_{\text{fin}} = V$.

Définition 1.4.2. (voir [HPS16, Définition 17.1] et [Pău16, Définition 2.8]) Soit X une variété complexe connexe, et soit $\mathcal{A}$ un fibré vectoriel holomorphe non-nul sur X. Une *métrique hermitienne singulière* sur $\mathcal{A}$ *à courbure semi-négative* est une fonction h qui associe à chaque point $x \in X$ un produit scalaire hermitien $\|\cdot\|_{h,x} : \mathcal{A}_x \to [0, +\infty]$ sur l'espace vectoriel complexe $\mathcal{A}_x$, avec les conditions suivantes :

— h est fini et défini positif presque partout, i.e. pour tout x en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, $\|\cdot\|_{h,x}$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{A}_x$.

— la fonction $x \mapsto \log \|s(x)\|_{h,x}$ est plurisousharmonique pour toute section locale de $\mathcal{A}$.

Remarquons que dans ce cas particulier, le produit scalaire hermitien $\|\cdot\|_{h,x}$ est fini en chaque point de X. Réciproquement, on a le résultat suivant.

Lemme 1.4.3. *Soit $\mathcal{A}$ un fibré vectoriel holomorphe non-nul sur une variété complexe compacte connexe X. Soit U un ouvert de Zariski de X, et soit h une métrique hermitienne singulière à courbure semi-négative sur $\mathcal{A}_{|U}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *h est la restriction à U d'une métrique hermitienne singulière à courbure semi-négative sur $\mathcal{A}$,*
2. *pour toute section locale de s sur $\mathcal{A}_{|U}$, la fonction $x \mapsto \|s(x)\|_{h,x}$ est localement bornée au voisinage de tout point de X.*

Par ailleurs, la métrique étendant h, si elle existe, est unique.

Démonstration. L'implication directe est évidente d'après la remarque précédente. L'implication réciproque est en fait une application directe du théorème classique d'extension des fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement à travers les sous-ensembles analytiques : si on se donne une section locale s de $\mathcal{A}$, ce théorème permet de définir la norme $\|s(x)\|_{h,x}$ pour tout point $x \in X \setminus U$, puisque $\log \|s(x)\|_{h,x}$ est plurisousharmonique et bornée supérieurement par hypothèse. $\square$

Sur les variétés projectives, les métriques singulières à courbure semi-négative peuvent être utilisées pour démontrer la faible positivité au sens de Nakayama des fibrés vectoriels, comme le montre le théorème suivant, dû à Păun et Takayama [PT14] :

Théorème 1.4.4 (Păun-Takayama [PT14])**.** *Soit X une variété projective, et soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel sur X. On suppose que E admet une métrique h à courbure semi-négative. Alors le fibré E^* est faiblement positif au sens de Nakayama en tout point où h est finie. En particulier, si h est finie sur un ouvert Zariski dense de X, alors E^* est faiblement positif au sens de Viehweg, d'après le lemme 1.3.4.*

1.5 Preuve du critère de positivité

On va maintenant aborder la preuve du théorème 1.1.1. On se place dans le cadre des premières hypothèses du théorème : on considère donc une variété complexe compacte X, et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. On suppose que $T_{X \smallsetminus D}$ admet une métrique singulière à courbure semi-négative, qui provienne d'une métrique hermitienne lisse sur un ouvert de Zariski $U \subset X \smallsetminus D$, et qui soit à courbure sectionnelle holomorphe négative sur U, bornée supérieurement par une constante négative $-A < 0$.

Commençons par démontrer les points (i) et (ii).

Lemme 1.5.1. *La métrique h s'étend en une métrique singulière $\widetilde{h}$ à courbure semi-négative sur $T_X(-\log D)$.*

Démonstration. D'après le lemme 1.4.3, il suffit de montrer que pour tout section locale t du fibré $T_X(-\log D)$ sur un ouvert de U, la fonction

$$\begin{aligned} \|t_{|U \smallsetminus D}\|_h : U \smallsetminus D &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \|t_{|U-D}(x)\|_h \end{aligned}$$

est localement bornée. Puisque le problème est local au voisinage du bord, et que celui-ci est un diviseur à croisements normaux simples, il suffit de traiter le cas où $X = \Delta^n$, $D = \{z_1 ... z_m = 0\}$ et où t est une section globale de $T_X(-\log D)$. Il s'agit alors de montrer que la fonction $x \mapsto \|t_{|U-D}(x)\|_h$ est bornée au voisinage de l'origine.

Cependant, puisque par hypothèse $\log\|s\|_h^2$ est plurisousharmonique pour toute section locale de $T_{X \smallsetminus D}$, on a $\log\|s(x)\|_h^2 \leq \max_{B(x,r) \smallsetminus \Sigma} \log\|s\|_h^2$ pour tout $x \in X \smallsetminus D$ et tout $r > 0$ assez petit, où $\Sigma = X \smallsetminus U$. Ainsi, h satisfait les trois hypothèses de la proposition 1.2.3. Par conséquent, le résultat est une conséquence du corollaire 1.2.4. □

Par [PT14], la métrique $\widetilde{h}$ étendant h induit une métrique à courbure semi-négative sur le fibré en droites $\mathcal{O}(K_X + D)^* = \det T_X(-\log D)$. En particulier, cette métrique est une métrique singulière à courbure négative au sens des courants (voir [Dem92]), c'est-à-dire que l'on peut l'écrire localement comme $\widetilde{h} = e^{-\phi}$, où $-\phi$ est une fonction L^1_{loc} et plurisousharmonique.

Lemme 1.5.2. *Le fibré $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big, et en particulier, X est une variété de Moishezon.*

Démonstration. Comme on vient de le voir, la métrique $\widetilde{h}$ est une métrique singulière à courbure négative au sens des courants, et donc son dual $\widetilde{h}^*$ est une métrique singulière sur $\mathcal{O}(K_X + D)$ à courbure positive au sens des courants. Par le théorème 0.4.1, cela implique que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(K_X + D) &\geq \int_X \left(\frac{i}{2\pi} \Theta(\det \widetilde{h}^*)^{ac} \right)^n \\ &= \int_U \left(\frac{i}{2\pi} \Theta(\det \widetilde{h}^*) \right)^n \end{aligned} \tag{1.4}$$

où n est la dimension de X. Dans la deuxième égalité, on a utilisé le fait que $X \smallsetminus U$ est de mesure nulle. Le terme intégré dans (1.4) est donc une forme lisse.

En tout point de U, la courbure de la métrique induite $\det h$ sur $\det T_X(-\log D)$ est alors donnée par $\mathrm{Tr}(\Theta(h))$. Pour tout vecteur non-nul $v \in T_x^{1,0}X$, on peut construire une base h_x-unitaire $(v = u_1, \cdots, u_n)$ de l'espace vectoriel $T_x^{1,0}X$. On a alors

$$i\mathrm{Tr}(\Theta(h))(v, \bar{v}) = i \sum_{i=1}^{n} \Theta(h)(v, \bar{v}, u_i, \overline{u_i})$$

Puisque par nos hypothèses h a courbure semi-négative, alors h est à courbure bisectionnelle négative sur U, et tous les termes dans la somme du membre de droite sont négatifs. Cependant, on suppose aussi que h a courbure sectionnelle holomorphe strictement négative en x. Ceci implique que le premier terme $i\Theta(h)(v,\overline{v},v,\overline{v}) = H(v)$ est strictement négatif, et que la somme est elle-même strictement négative. En tout point de U, la forme intégrée dans (1.4) est donc strictement positive, ce qui montre que $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big. □

On peut maintenant terminer la preuve du point (ii).

Lemme 1.5.3. *Soit $X' \xrightarrow{\nu} X$ une modification projective de X, et soit $V \subset \widetilde{X}$ l'ouvert sur lequel ν est un biholomorphisme. Alors $\nu^*\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Nakayama en tout point de $V \cap \nu^{-1}(U)$. En particulier, par le lemme 1.3.4, $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Viehweg.*

Démonstration. On note $\nu^*\widetilde{h}$ la métrique hermitienne singulière induite sur le fibré $\nu^*T_X(-\log D)$; cette métrique est finie et définie positive presque partout sur X'. Alors, puisque la métrique hermitienne $\|\cdot\|_h$ est localement bornée supérieurement sur $T_X(-\log D)$, il est clair que pour toute section locale s de $\nu^*T_X(-\log D)$, la fonction $\log\|s\|_{\nu^*\widetilde{h}}$ est localement bornée supérieurement. Ainsi, la preuve du lemme 1.5.1 indique que $\nu^*\widetilde{h}|_{V\cap\nu^{-1}(U)}$ s'étend en une métrique singulière à courbure semi-négative sur $\nu^*T_X(-\log D)$. Cette extension est lisse sur l'ouvert de Zariski $\nu^{-1}(U)\cap V$, donc finie sur ce même ouvert. Par le théorème 1.4.4, ceci implique le résultat. □

Supposons à présent qu'il existe un point $x \in U$ et un vecteur tangent $v \in T_{U,x}$, telle que la forme quadratique hermitienne $B(v,\cdot)$ soit définie négative.

Lemme 1.5.4. *Sous les hypothèses précédentes, le fibré vectoriel $\Omega_X(\log D)$ est big.*

Démonstration. Soit $p : \mathbb{P}(T_X(-\log D)) \longrightarrow X$ la projection canonique.

Notons $\widehat{h}_U$ la métrique induite par h sur le fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)|_{p^{-1}(U)} \longrightarrow \mathbb{P}(T_U)$. Puisque l'on a supposé que h était à courbure semi-négative, un calcul direct implique que la métrique $h|_U$ est à courbure bisectionnelle négative.

On peut exprimer la courbure de la métrique $\widehat{h}_U^*$ sur $\mathcal{O}(1)$ en fonction de la courbure bisectionnelle, de la façon suivante (voir [Gri69]). Si $(x,[v]) \in \mathbb{P}(T_U)$, et si ξ est un vecteur tangent à $\mathbb{P}(T_U)$ basé en $(x,[v])$, on a

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\Theta(\widehat{h}_U^*)\cdot(\xi,\xi) &\overset{loc}{=} -\frac{i}{2}\frac{\langle\sigma,\Theta(h)\cdot(p_*\xi,p_*\xi)\sigma\rangle_h}{\|\sigma\|_h^2} + \omega_h^{FS}(\xi^{vert},\xi^{vert}) \\ &= -\frac{1}{2}B(\sigma,p_*\xi)\|p_*\xi\|_h + \omega_h^{FS}(\xi^{vert},\xi^{vert}) \qquad (1.5)\end{aligned}$$

où σ est une section holomorphe de $\mathcal{O}(-1)$, égale à v en $(x,[v])$. Le premier terme est positif puisque B est négative. Le second terme, qui s'exprime en fonction de la métrique de Fubini-Study sur les fibres de la projection p, est aussi positif. Ainsi, la métrique $\widehat{h}_U^*$ est une métrique lisse à courbure positive sur le fibré $\mathcal{O}(1)|_{p^{-1}(U)}$.

Cependant, d'après le lemme 1.5.1, et d'après la remarque suivant la définition 1.4.2, pour toute section holomorphe locale s de $T_X(-\log D)$, la norme $\|s\|_h$ est localement bornée sur U. Ceci implique facilement que la norme de toute section locale de $\mathcal{O}(-1)$ sur $\mathbb{P}(T_X(-\log D))$ est localement bornée sur $p^{-1}(U)$ pour la métrique $\widehat{h}$. Ainsi, par le lemme 1.4.3, la métrique $\widehat{h}_U$ s'étend de manière unique en une métrique singulière $\widehat{h}$ à courbure négative sur le fibré en droites $\mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X(-\log D))$. Le dual $\widehat{h}^*$ de cette métrique a alors courbure positive au sens des courants sur $\mathcal{O}(1)$. On a alors, d'après le théorème 0.4.1 :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\mathcal{O}(1)) &\geq \int_{\mathbb{P}(T_X(-\log D))}\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)^{ac}\right)^{2n-1} \\ &= \int_{\mathbb{P}(T_U)}\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}_U^*)\right)^{2n-1}. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que la métrique h_U est lisse sur l'ouvert de mesure pleine $p^{-1}(U)$. La forme intégrée dans la dernière intégrale est positive d'après ce qui précède.

Cependant, puisque par hypothèse le point $(x,[v]) \subset \mathbb{P}(T_U)$ est tel que pour tout vecteur $w \in T_{U,x} \setminus \{0\}$, on a $B(v,w) < 0$, alors, d'après la formule (1.5), on a, pour tout $\xi \in T_{p^{-1}(U),(x,[v])} \setminus \{0\}$:

$$i\Theta(\widehat{h}^*)_{(x,[v])} \cdot (\xi, \overline{\xi}) > 0.$$

Ainsi, la forme $\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}_U^*)\right)^{2n-1}$ est strictement positive au point $(x,[v])$, ce qui montre que l'intégrale de droite dans (1.6) est strictement positive. Ceci prouve que $\mathrm{vol}(\mathcal{O}(1)) > 0$, et donc que $\Omega_X(\log D)$ est big. □

Supposons à présent que la métrique h, vue comme métrique sur le fibré tangent T_X est partout localement bornée. Alors on peut transposer l'ensemble des lemmes précédents au cas du fibré tangent. On commence ainsi par montrer le lemme suivant.

Lemme 1.5.5. *Sous les hypothèses précédentes, la métrique h s'étend en une métrique singulière $\widetilde{h}$ à courbure semi-négative sur T_X.*

Démonstration. Comme dans le lemme 1.5.1, on montre que pour toute section locale t de T_X sur un ouvert de U, la fonction

$$\|t_{|U \setminus D}\|_h : U \setminus D \to [0,+\infty),\ x \mapsto \|t_{|U-D}(x)\|_h$$

est localement bornée. Cependant, ceci provient de la dernière hypothèse faite sur h. □

Les lemmes 1.5.2, 1.5.3 et 1.5.4 se transposent alors sans changement au cas des objets non logarithmiques, ce qui démontre les points (iv) et (v).

Ceci achève la preuve du théorème.

1.6 Application à l'hyperbolicité des variétés supportant une variation de structures de Hodge complexe

1.6.1 Rappels sur les variations de structures de Hodge complexes

Comme application directe du théorème 1.1.1, on va maintenant présenter des résultats d'hyperbolicité des variétés supportant une variation de structure de Hodge complexe, obtenus en collaboration avec Y. Brunebarbe [BC17]. Procédons tout d'abord à quelques rappels concernant les variations de structure de Hodge (VSH). On renvoie pour plus de précisions à [Voi02].

Les VSH apparaissent naturellement dans l'étude des familles de variétés complexes polarisées. Rappelons qu'une *famille de variétés complexes compactes* sur une variété (connexe) lisse S est une submersion holomorphe propre $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S$, où $\mathcal{X}$ est une certaine variété complexe lisse. Les fibres $\pi^{-1}(s) = X_s$ de la projection sont alors les membres de la famille de variétés complexes en question. En vertu du théorème d'Ehresman, elles sont toutes difféomorphes entre elles ; leur structure complexe peut cependant varier.

On dit en outre que la famille est *polarisée* s'il existe une 2-forme fermée Ω sur $\mathcal{X}$, à classe de cohomologie entière, et induisant une forme de Kähler sur chaque fibre X_s (et même une forme de Hodge). Chacune de ces variétés étant alors kählérienne (et même projective), on a une décomposition de Hodge sur chacun des espaces $H^k(X_s, \mathbb{C})$ pour tout $k \geq 0$ et $s \in S$.

Le point de départ de la théorie des VSH consiste à étudier la manière dont varient les décompositions de Hodge sur les espaces de cohomologie primitive $H^k(X_s, \mathbb{C})_{\mathrm{prim}}$, en tirant profit du fait que ces espaces sont tous isomorphes entre eux par le théorème d'Ehresman.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, où n est la dimension des fibres X_s. Le théorème d'Ehresman implique que le faisceau $R^k\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\mathrm{prim}}$ est localement constant : il s'agit d'un $\mathbb{C}$-système local de rang $b_k - b_{k-2}$, où b_l est le

l-ième nombre de Betti d'une fibre de π. , Alors, si l'on note $\mathcal{H}_k = R^k\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\text{prim}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$, le faisceau $\mathcal{H}_k$ est en fait un fibré vectoriel holomorphe de rang $b_k - b_{k-2}$, et la donnée de $R^k\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\text{prim}}$ détermine une connexion plate ∇ sur $\mathcal{H}_k$, dont les sections plates s'identifient aux sections de $R^k\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\text{prim}} \subset \mathcal{H}_k$.

Par ailleurs, si $s \in S$, la fibre de $\mathcal{H}_k$ en s s'identifie à l'espace $H^k(X_s, \mathbb{C})_{\text{prim}}$. On peut montrer que les décompositions de Hodge $H^k(X_s, \mathbb{C})_{\text{prim}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X_s)_{\text{prim}}$ se recollent pour donner une décomposition de $\mathcal{H}^k$ en sous-fibrés *lisses* $K^{p,q} \subset \mathcal{H}^k$, de la forme suivante :

$$\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p+q=k} K^{p,q}.$$

On définit alors la *filtration de Hodge* $F^\bullet\mathcal{H}^k$ de la façon suivante.

$$F^l H^k = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p \geq l}} K^{p,q}. \tag{1.7}$$

Le premier résultat fondamental concernant la théorie des VSH est le suivant :

Théorème 1.6.1 (Griffiths [Gri68]). *La filtration $F^\bullet\mathcal{H}^k$ est holomorphe, autrement dit, chaque fibré $F^l\mathcal{H}^k$ est un sous-fibré holomorphe de $\mathcal{H}^k$.*

Le théorème suivant, appelé *transversalité de Griffiths*, précise le comportement de la connexion ∇ par rapport à la filtration de Hodge.

Théorème 1.6.2 (Griffiths [Gri68]). *Pour tout $l \in [\![0, k]\!]$, on a*

$$\nabla(F^l\mathcal{H}^k) \subset F^{l-1}\mathcal{H}^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega_S.$$

On dispose aussi d'une structure hermitienne sur la décomposition de Hodge, liée aux formes de Kähler $\omega_s = \Omega|_{X_s}$ sur les fibres. Pour chaque point $s \in S$, on peut construire une forme sesquilinéaire hermitienne $h_{k,s}$ sur $H^k(X_s, \mathbb{C})_{\text{prim}}$, de la façon suivante :

$$\forall \alpha, \beta \in H^k(X_s, \mathbb{C})_{\text{prim}}, \;\; h_{k,s}(\alpha, \beta) = i^k \int_{X_s} \omega_s^{n-k} \wedge \alpha \wedge \overline{\beta} \tag{1.8}$$

Alors, on a le théorème classique suivant, qui généralise les *relations bilinéaires de Riemann* au cas des variétés kählériennes de dimension arbitraire.

Théorème 1.6.3. *La décomposition $H^k(X_s, \mathbb{C})_{\text{prim}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\text{prim}}$ est orthogonale pour la forme $h_{k,s}$. De plus, pour tout p, $h_{k,s}$ est définie de signe $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+p}$ sur $H^{p,q}_{\text{prim}}$.*

Les formes $h_{k,s}$ se recollent alors pour donner une forme sesquilinéaire hermitienne h_k sur le fibré $\mathcal{H}^k$, de sorte que la décomposition $\mathcal{H}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{K}^{p,q}$ soit orthogonale pour h_k, et telle que h_k soit définie de signe $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+p}$ sur $K^{p,q}$.

Remarquons que puisque les classes $[\omega_s] \in H^2(X_s, \mathbb{C})$ sont entières, la section associée de $\mathcal{H}^2$ doit être plate pour la connexion ∇ sur ce fibré vectoriel. Au vu de la formule (1.8), cela implique que h_k doit prendre des valeurs *constantes* sur les sections du système local $R^k\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\text{prim}} \subset \mathcal{H}^k$. Autrement dit, la forme h_k est *plate* pour la connexion ∇.

La notion de VSH complexe polarisée permet d'encoder l'ensemble des propriétés que l'on vient de décrire. En voici la définition.

Définition 1.6.4. Soit S une variété complexe. Une *variation de Hodge complexe polarisée* sur S est la donnée d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{E}$, muni d'une connexion plate ∇, d'une décomposition en sous-fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$,

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E^p,$$

et d'une forme sesquilinéaire hermitienne h plate pour ∇, tels que

1. pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $F^p\mathcal{E} = \bigoplus_{l \geq p} E^l$ est un sous-fibré holomorphe de $\mathcal{E}$;
2. (transversalité de Griffiths) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a
$$\nabla(F^p\mathcal{E}) \subset F^{p-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \Omega_S;$$
3. la décomposition $\mathcal{E} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p$ est orthogonale pour h, et h est définie du signe $(-1)^p$ sur chaque E^p.

Soient $r \in \mathbb{N}$, et $(r_p) \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, choisis de sorte que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} r_p = r$. Si S est une variété complexe, les VSH complexes polarisées $(\mathcal{E}, \nabla, \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p, h)$ telles que $\operatorname{rg}\mathcal{E} = r$ et $\operatorname{rg} E^p = r_p$ pour tout p, sont naturellement paramétrées par un ouvert $\mathcal{D}$ d'une certaine variété de drapeaux F.

En tant qu'ensemble, F paramètre les filtrations
$$\ldots \subset F^p \subset F^{p+1} \subset \ldots \subset \mathbb{C}^r,$$
telles que $\dim F^p = r_p$ pour tout p. On vérifie alors qu'on peut la munir d'une structure naturelle de variété complexe. Si l'on fixe une forme hermitienne H sur $\mathbb{C}^r$, avec la signature $(\sum_{p\,\mathrm{pair}} r_p, \sum_{p\,\mathrm{impair}} r_p)$, l'ouvert $\mathcal{D} \subset F$ est alors l'ensemble des filtrations $(F_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ telles qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathbb{C}^r = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E_p$ compatible avec (F_p), pour laquelle H est définie de signe $(-1)^p$ sur chaque E_p.

L'ouvert $\mathcal{D}$ est appelé *domaine des périodes* des variations de structures de Hodge complexes polarisées pour la donnée $(r, (r_p)_{p\in\mathbb{Z}})$.

Soit maintenant une VSH complexe polarisée $(\mathcal{E}, \nabla, \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p, h)$ sur une variété complexe S. Alors, avec les notations précédentes, si l'on fixe un point $p \in S$ et une isométrie $(\mathcal{E}_p, h_p) \longrightarrow (\mathbb{C}^r, H)$, on peut construire une application naturelle $\mathcal{P} : \widetilde{S} \longrightarrow \mathcal{D}$, où $\widetilde{S} \overset{\pi}{\longrightarrow} S$ est le revêtement universel de S. Pour ce faire, on utilise le fait que la connexion $\pi^*\nabla$ est plate sur la variété simplement connexe $\widetilde{S}$, ce qui implique qu'elle est en fait triviale sur $\pi^*\mathcal{E}$. Cette connexion fournit donc une trivialisation globale du fibré vectoriel lisse π^*E sous-jacent à $\pi^*\mathcal{E}$. Par transport parallèle, ceci permet d'identifier toutes les fibres $(\pi^*\mathcal{E})_q$ à E_p, et donc à $\mathbb{C}^r$. Cette identification est même isométrique puisque la métrique h est ∇-plate. Il suffit alors de définir $\mathcal{P}(q)$ comme le point de $\mathcal{D}$ associé à la filtration obtenue en transportant $F^\bullet(\pi^*\mathcal{E})_q$ sur $\mathbb{C}^r$ par l'identification précédente.

L'application $\mathcal{P}$ est appelée *application des périodes* de la VSH complexe polarisée associée à la donnée $(\mathcal{E}, \nabla, \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p, h)$. Par définition d'une VSH complexe, cette application est holomorphe. Par ailleurs, la propriété de transversalité de Griffiths signifie que la différentielle $d\mathcal{P}$ ne peut prendre ses valeurs que dans un certain sous-fibré de $T\mathcal{D}$, formant les directions que l'on qualifie d'*horizontales* dans $\mathcal{D}$. En général, l'application des périodes ne sera donc jamais submersive.

On dira qu'une VSH complexe polarisée sur une variété S est à *variation maximale* si son application des périodes est immersive en un point de S. Cela implique qu'elle est en fait immersive sur un ouvert de Zariski de S.

1.6.2 Résultats

Le résultat principal de [BC17] est que les variétés supportant une VSH complexe polarisée à variation maximale satisfont des fortes propriétés d'hyperbolicité.

Théorème 1.6.5 ([BC17])**.** *Soit X une variété complexe compacte et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $X \smallsetminus D$ admette une variation de Hodge complexe polarisée à variation maximale. Alors*

1. *le fibré canonique logarithmique $\mathcal{O}(K_X + D)$ est big, et la variété ouverte $X \smallsetminus D$ est donc de type log-général.*
2. *le fibré cotangent logarithmique $\Omega_X(\log D)$ est faiblement positif au sens de Viehweg [Vie83], et big.*

On peut obtenir plusieurs corollaires intéressants à partir du théorème 1.6.5, notamment un critère pour qu'une variété complexe soit de Moishezon.

Corollaire 1.6.6 ([BC17])**.** *Soit X une variété complexe compacte. Supposons qu'un certain ouvert de Zariski de X supporte une VSH complexe polarisée à variation maximale. Alors X est une variété de Moishezon.*

Corollaire 1.6.7. *Soit U une variété algébrique complexe supportant une VSH complexe polarisée $\mathcal{E}$, et soit* $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$ *le lieu des points de U où l'application des périodes de $\mathcal{E}$ n'est pas immersive. Alors*

1. *(Griffiths-Schmid) toute courbe entière tracée sur U est incluse dans* $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$ *;*
2. *toute sous-variété (éventuellement singulière) de U qui n'est pas de type log-général est incluse dans* $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$.

Mentionnons enfin un dernier corollaire du Théorème 1.6.5, portant sur les familles de variétés à canonique trivial.

Par le théorème de Bogomolov-Todorov-Tian (voir [Fri91], et [Tia87]), on sait que toute variété de dimension n à canonique trivial admet une *famille de Kuranishi* lisse, c'est-à-dire une famille de déformations universelle de X supportée sur un ouvert assez petit $V \subset \mathbb{C}^N$, avec $N = h^1(X, T_X) = h^{n-1,1}(X)$.

Par ailleurs, si $\mathcal{P} : \widetilde{V} \cong V \longrightarrow \mathcal{D}$ est l'application des périodes associée à la VSH naturelle sur $R^n\pi_*(\underline{\mathbb{C}})_{\mathrm{prim}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_V$, le théorème de Torelli local implique que $\mathcal{P}$ est une immersion.

Soit $\mathcal{X} \longrightarrow S$ une famille de variétés à canonique trivial. Pour tout $p \in S$, si $\mathcal{Y} \longrightarrow V$ est une famille de Kuranishi de X_p, la famille $\mathcal{X}$ induit une application holomorphe naturelle du germe (S, p) vers V. On dit alors que $\mathcal{X}$ est *à variation maximale* s'il existe un point $p \in S$ pour lequel cette application est immersive.

Le théorème 1.6.5 implique alors le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.8. *Soit X une variété complexe, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $U = X \smallsetminus D$ supporte une famille polarisée de variétés à fibré canonique trivial, à variation maximale. Alors U est de type log-général.*

En particulier, toute famille polarisée de variétés à canonique trivial supportée sur $\mathbb{C}$ est isotriviale, i.e. les éléments d'une telle famille sont isomorphes deux-à-deux.

En effet, si $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} U$ est une famille polarisée de variétés de Calabi-Yau à variation maximale, la VSH complexe polarisée naturelle sur $R^n\pi_*\underline{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ est aussi à variation maximale par le théorème de Torelli local. Par conséquent, on est dans les hypothèses du théorème 1.6.5.

1.6.3 Variations de structures de Hodge et propriétés de courbure du domaine des périodes

On va maintenant expliquer que sous les hypothèses du théorème 1.6.5, il existe une métrique singulière sur $X \smallsetminus D$ satisfaisant les trois premières hypothèses du théorème 1.1.1. Ceci suffira à démontrer le théorème 1.6.5.

On commence par rappeler quelques propriétés de courbure du domaine des périodes associé à une variation de structure de Hodge.

Soit X une variété complexe, et soit $(\mathcal{E}, \nabla, h, \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E_p)$ une *variation de structure de Hodge complexe polarisée* ($\mathbb{C}$-PVHS) sur X (voir la définition 1.6.4). Comme on l'a vu précédemment, puisque la variété X est connexe, et puisque h est ∇-plat, les nombres $r_p = \mathrm{rk}\, \mathcal{E}^p_x$ sont constants, et toutes les fibres $(\mathcal{E}_x, h_x)$ sont isomorphes, comme espaces vectoriels hermitiens, à un espace vectoriel (E, h), muni d'une forme hermitienne de signature $\left(\sum_{p\,\mathrm{pair}} r_p, \sum_{p\,\mathrm{impair}} r_p\right)$.

Definition 1.6.1. Le *domaine des périodes* $\mathcal{D}$ associé à la donnée $(E, h, (r_p)_p)$ est l'ensemble de toutes les décompositions h-orthogonales $E = \sum_{p\in\mathbb{Z}} E_p$ telles que pour tout p, $\mathrm{rk}\, E_p = r_p$, et telles que la restriction $h|_{E_p}$ est définie positive pour p pair, et définie négative pour p impair.

En associant à toute décomposition $E = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p$ la filtration correspondante $F^p := \bigoplus_{q\geq p} E^q$ de V, on identifie $\mathcal{D}$ avec un ouvert d'une variété de drapeaux, pour la topologie euclidienne.

Le groupe $\mathrm{G} := \mathrm{U}(E, h) \simeq \mathrm{U}(\sum_{p \text{ impair}} r_p, \sum_{p \text{ pair}} r_p)$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$, avec comme groupe d'isotropie $\mathrm{V} = \prod_p \mathrm{U}(h_p) \simeq \prod_p \mathrm{U}(r_p)$. Ceci donne à $\mathcal{D}$ une structure canonique de variété complexe homogène.

La donnée d'une variation de structure de Hodge complexe polarisée avec les rangs r_p sur X est alors équivalente à la donnée de ses représentations de monodromie $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{G}$ avec l'application des périodes associée, qui est une application holomorphe $\pi_1(X, x_0)$-équivariante $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to \mathcal{D}$ du revêtement universel $\widetilde{X}$ vers $\mathcal{D}$, et qui est tangente au *sous-fibré horizontal* de $\mathcal{D}$ déterminé par la condition de transversalité de Griffiths.

Le domaine des périodes $\mathcal{D}$ admet une métrique canonique G-invariante, dont Griffiths et Schmid ont montré que la courbure sectionnelle holomorphe dans les directions horizontales est majorée par une constante strictement négative [GS69, Théorème 9.1], (voir aussi [CMSP03, Théorème 13.3.3]). En tirant en arrière cette métrique par l'application des périodes $\widetilde{p} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathcal{D}$, on obtient alors une métrique singulière h sur $T_{X\smallsetminus D}$, qui est partout localement bornée sur $X \smallsetminus D$.

Puisque l'application des périodes est toujours tangente au sous-fibré horizontal de $T_{\mathcal{D}}$ et que la courbure sectionnelle holomorphe décroît sur les sous-variétés, la métrique singulière h sur $T_{X\smallsetminus D}$ est lisse et à courbure sectionnelle holomorphe négative sur l'ouvert de Zariski $U \subset X \smallsetminus D$ sur lequel $\widetilde{p}$ est une immersion.

Peters a par ailleurs montré que la métrique h est à courbure bisectionnelle courbure bisectionnelle négative sur U [Pet90, Corollaire 1.8, Lemme 3.1]. Comme la métrique singulière h est partout localement bornée sur $T_{X\smallsetminus D}$, ceci implique que par le lemme 1.4.3 que h est une métrique singulière semi-négative sur $T_{X\smallsetminus D}$.

Enfin, on déduit facilement des résultats de [Pet90] que h est une métrique kählérienne sur U, bien que la métrique sur $\mathcal{D}$ soit seulement une métrique hermitienne (on pourra se référer à [Lu99] ou [Eys97] pour une présentation de ce résultat).

Ainsi, par le lemme 1.1.2, la métrique h satisfait les hypothèses impliquant les trois premières conclusions du théorème 1.1.1, ce qui prouve le théorème 1.6.5.

Chapitre 2

Différentielles symétriques sur les quotients non compacts de la boule

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des résultats issus des articles [Cad16] et [CRT17], où l'on développe des méthodes métriques permettant d'étudier le caractère big du fibré cotangent des sous-variétés d'une compactification toroïdale.

Dans [Cad16], on prouve le critère métrique suivant pour le caractère big du fibré cotangent d'une paire logarithmique donnée.

Théorème 2.1.1 ([Cad16]). *Soit X une variété complexe, et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux simples. Supposons que $X \smallsetminus D$ soit muni d'une métrique lisse kählérienne h, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *h a courbure sectionnelle holomorphe H négative, bornée supérieurement par une constante $-A < 0$;*
2. *h a courbure bisectionnelle B négative ou nulle : pour tous vecteurs u, v tangents à $X \smallsetminus D$ en un certain point, on a $B(u,v) \leq 0$;*

alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_X(\log D)$ est big. En outre, si

3. *h, vue comme métrique sur le fibré tangent T_X, est localement bornée,*

alors Ω_X est big.

Ce théorème est en fait une conséquence immédiate du théorème 1.1.1, appliqué à la métrique h. On déduit du théorème 2.1.1 une preuve métrique directe du résultat suivant, dû à Brunebarbe.

Théorème 2.1.2 ([Bru16b]). *Soit $\overline{X} = X \cup D$ une compactification toroïdale lisse d'un quotient de domaine symétrique borné. Alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ est big.*

Avec le théorème 2.2.1, on présentera une version du théorème 2.1.1 ne faisant pas appel à l'hypothèse suivant laquelle h est kählérienne. Cette version sera particulièrement adaptée à l'étude des sous-variétés d'une compactification toroïdale d'un quotient de la boule unité complexe, comme construites par Mok [Mok12]. On qualifiera ces compactifications toroïdales de *minimales* ; on expliquera cette terminologie à la Section 2.3.1.

L'application du théorème 2.1.1 à certaines métriques conformes à la métrique de Bergman, restreinte aux sous-variétés d'une telle compactification toroïdale minimale, fournira le résultat suivant.

Théorème 2.1.3. *Soit $\overline{X} = \overline{{}_{\Gamma}\backslash^{\mathbb{B}^n}}$ une compactification toroïdale minimale lisse. Si le fibré*

$$L = K_{\overline{X}} + D - (n+1)D$$

est big, alors toute sous-variété $V \subset \overline{X}$ telle que $V \not\subset D \cup \mathbb{B}^+(L)$ est de type général. Plus précisément, toute résolution des singularités de V a son fibré cotangent big.

En appliquant les résultats de Bakker et Tsimerman [BT15], on peut alors obtenir la version effective suivante du théorème 0.2.3.

Théorème 2.1.4 ([Cad16]). *Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale minimale lisse d'un quotient $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}^n$, et soit $\overline{X'} \xrightarrow{\pi} \overline{X}$ un revêtement ramifié fini, étale sur l'intérieur X. Supposons que π ramifie à des ordres supérieurs à un certain entier l sur chaque composante de bord. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *$n = 4$ et $l \geq 6$,*
2. *$n \in \{2, 3\} \cup [\![5, +\infty[\![$ et $l \geq 7$.*

Alors toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$, non incluse dans le bord, est de type général. Plus précisément, toute résolution des singularités $\widetilde{V} \longrightarrow V$ a son fibré cotangent $\Omega_{\widetilde{V}}$ big.

Le théorème 2.1.1 peut aussi s'appliquer pour étudier le caractère nef des fibrés cotangent et cotangent logarithmique d'une compactification toroïdale minimale d'un quotient de la boule. Ceci donne les deux résultats suivants.

Théorème 2.1.5 ([Cad16]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale minimale lisse. Alors le fibré cotangent logarithmique $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ est nef.*

Théorème 2.1.6 ([Cad16]). *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale minimale lisse et soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié fini étale sur X, ramifiant à des ordres supérieurs ou égaux à 7 sur chaque composante de bord. Alors $\Omega_{\overline{X'}}$ est nef.*

Ce dernier théorème peut alors être utilisé pour donner une version plus précise du théorème 2.1.4. Rappelons que l'on dit qu'un fibré vectoriel E sur une variété complexe projective Y est *ample modulo un sous-ensemble* $Z \subset Y$, s'il existe une puissance du fibré tautologique $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(E^*)$ qui induit une application rationnelle de $\mathbb{P}(E^*)$ vers un espace projectif, qui soit un isomorphisme au-dessus de $Y \setminus Z$.

Corollaire 2.1.7 ([Cad16]). *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.1.4, toute sous-variété immergée $V \xrightarrow{f} \overline{X}$, si elle est non incluse dans le bord, a son fibré cotangent Ω_V ample modulo le bord $f^{-1}(D)$.*

Dans la dernière section de ce chapitre, on présentera aussi des applications du théorème 2.1.1 au cas des compactifications de quotients singuliers de domaines symétriques bornés, issus de l'article [CRT17], en collaboration avec E. Rousseau et B. Taji.

La suite du chapitre provient des articles [Cad16] et [CRT17].

2.2 Metric criterion for the bigness of the cotangent bundle

In this section, we use singular metrics to study the bigness of the standard and logarithmic cotangent bundle of a logarithmic pair (X, D). We will see that general assumptions on the negativity of the curvature of $X \setminus D$, are already sufficient to prove that $\Omega_X(\log D)$ is big.

Terminology. We call *logarithmic pair* (or *log-pair*) the data of a pair (X, D), where X is a smooth complex projective manifold, and $D \subset X$ a divisor with simple normal crossings. If D is smooth, we say that the log-pair (X, D) has *smooth boundary*.

2.2.1 Singular metrics on the tangent bundles

The following result relates the bigness of the standard and logarithmic cotangent bundles of a given log-pair (X, D), to the negativity of the curvature of a given Kähler metric on the open part $X \smallsetminus D$. This is a direct generalization of a theorem of Brunebarbe, Klingler and Totaro [BKT13]. In [Cad16], we use the criterion for bigness given by Theorem 0.4.1, coupled with the Ahlfors-Schwarz lemma 1.2.1, to extend the field of application of their proof. This gives a proof of the following theorem, which is a slightly more general version of Theorem 2.1.1.

Theorem 2.2.1. *Let (X, D) be a logarithmic pair. Assume that $T_X|_{X \smallsetminus D}$ admits a smooth metric h (not necessarily Kähler) satisfying the following hypotheses :*

1. *h has negative holomorphic sectional curvature H on $X \smallsetminus D$, bounded from above by a constant $-A$;*
2. *h has non-positive bisectional curvature B ;*
3. *h has negative bisectional curvature at some point of $\mathbb{P}(T_X|_{X \smallsetminus D})$ i.e. there exist $x_0 \in X \smallsetminus D$, $v_0 \in T_{x_0}X \smallsetminus \{0\}$ such that*
$$\forall w \in T_{x_0}X \smallsetminus \{0\}\,,\ B(v_0, w) < 0.$$

Then $\Omega_X(\log D)$ is big. In addition, if

4. *h, seen as a metric on T_X, is locally bounded ;*

then Ω_X is big.

With the presentation of Chapter 1, we can actually see this result as an immediate consequence of Theorem 1.1.1. Besides, as we explained in Chapter 1, if the metric is supposed to be Kähler on the neighborhood of some point of $X \smallsetminus D$, then the first two hypothesis imply the third one, by Lemma 1.1.2.

We can now give a simple metric proof of Theorem 2.1.2. If Ω is a bounded symmetric domain, its Bergman metric h_{Berg} is a Kähler metric satisfying the first two hypotheses of Theorem 2.1.1. Therefore, for any quotient X of Ω by a subgroup $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$, the metric induced on X by h_{Berg} satisfies those same hypotheses. If $\overline{X} = X \sqcup D$ is any smooth compactification of X, with D being a divisor with simple normal crossings, Theorem 2.1.1 implies that $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ is big. This proves Theorem 2.1.2.

We finish this section by a result which will be central in our study of the nefness of the cotangent bundles of the toroidal compactification of a ball quotient constructed by Mok [Mok12].

Proposition 2.2.2. *Let (X, D) be a pair satisfying the hypotheses 1 and 2 of Theorem 2.1.1. Let $Y = \mathbb{P}(T_X(-\log D))$, with its canonical projection p onto X. Let $f : V \longrightarrow Y$ a generically finite morphism from a complex compact manifold onto a subvariety $f(V) \subset Y$, not included in $p^{-1}(D)$. Then h induces a singular metric $\widehat{h}^*$ on the tautological bundle $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X(-\log D))$, and*

$$\mathrm{vol}\,(f^*\mathcal{O}(1)) \geq \int_{f^{-1}(Y \smallsetminus p^{-1}(D)) \cap V_S} \left[\frac{i}{2\pi} f^*\Theta(\widehat{h}^*)\right]^{2\dim V - 1},$$

and V_S is the locus of points where f is immersive.

Proof. We saw in the proof of Theorem 1.1.1 that the induced metric $\widehat{h}^*$ is a singular metric with positive curvature in the sense of currents, so we can write locally $\widehat{h}^* \overset{loc}{=} e^{-\Psi}$, with Ψ plurisubharmonic and nowhere equal to $-\infty$ on $Y \smallsetminus p^{-1}(D)$. Consequently, we have

$$f^*\widehat{h}^* \overset{loc}{=} e^{-\Psi \circ f},$$

with $\Psi \circ f$ plurisubharmonic, and nowhere equal to $-\infty$ outside $f^{-1}\left(p^{-1}(D)\right)$. Since $f(V)$ is not included in $p^{-1}(D)$, this implies that $\Psi \circ f \in \mathrm{Psh} \cap L^1_{loc}$, hence that $f^*\widehat{h}^*$ induces a singular metric on $f^*\mathcal{O}(1)$, with positive curvature in the sense of currents. Therefore, the line bundle $f^*\mathcal{O}(1)$ is pseudo-effective, and we can estimate its volume using Theorem 0.4.1. Since $V_S \cup f^{-1}(p^{-1}(D))$ has zero Lebesgue measure, the absolutely continuous part of the curvature $\Theta(f^*\widehat{h}^*)$ *in the sense of currents* is given by the smooth curvature $f^*\Theta(\widehat{h}^*)|_{f^{-1}(Y\smallsetminus p^{-1}(D))\cap V_S}$, which gives the result. □

2.3 Compactifications of ball quotients

2.3.1 Construction of the toroidal compactification of Mok

We recall some results on the structure of the toroidal compactification of a quotient of the complex unit ball, as constructed in [Mok12].

Let $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \,;\, ||z|| < 1\}$ be the complex unit ball. Then $\mathbb{B}^n$ can be identified to the following open subset of $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{B}^n \cong \left\{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n \,;\, |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 - |z_0|^2 < 0\right\}.$$

and $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ can be identified with the subgroup of $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}(n+1)$ whose elements leave invariant the hermitian form of signature $(n,1)$ defining $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{P}^n$, up to multiplicative constant. This means that $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n) \cong \mathrm{PU}(n,1)$.

Now let $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n,1)$ be a lattice, i.e. a discrete subgroup of the automorphisms of the ball, with finite covolume. As explained in [Mok12] and [CC15b], if we assume that all parabolic isometries of Γ are unipotent, it is possible to compactify the quotient $\Gamma\backslash\mathbb{B}^n$ using a construction similar to the one of [AMRT10], which we can find in full detail in [Mok12]. If Γ is supposed to be a neat arithmetic subgroup of $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$, this assumption will always be verified.

From now on, we will assume that Γ is a torsion-free lattice of automorphisms of $\mathbb{B}^n$ with unipotent parabolic isometries. Let $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}^n$. Then, to construct a toroidal compactification of X, it suffices to add to it a finite number of abelian varieties at its cusps, to obtain a smooth manifold $\overline{X}$. Let us describe the structure of the obtained compactification $\overline{X}$ in the neighborhood of such a cusp.

For any $N > 0$, let

$$S^{(N)} = \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}; l(z', z_n) > N\right\}, \tag{2.1}$$

with $l(z', z_n) = \mathrm{Im} z_n - ||z'||^2$. The open set $S^{(0)}$ is a Siegel domain representation of $\mathbb{B}^n$ with respect to a given base point $b \in \partial\mathbb{B}^n$, and the family $(S^{(N)})_N$ represents the family of horoballs of $\mathbb{B}^n$ at the point b.

There exists a finite number of conjugacy classes of maximal parabolic subgroups $\Gamma_i \subset \Gamma$, each one of them corresponding to a cusp C_i of X. Let $\Gamma_b \subset \Gamma$ be such a group, fixing some $b \in \partial\mathbb{B}^n$. Then, for a certain $N > 0$, Γ_b fixes the horoball $S^{(N)}$, where the Siegel representation (2.1) is taken so that $0 \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ corresponds to b.

Let W_b be the unipotent radical of the stabilizer of b inside $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$. Then, as explained in [Mok12], if N is large enough, we have a natural action of $W_b \cap \Gamma$ on $S^{(N)}$, and a natural open embedding

$$W_b \cap \Gamma \backslash S^{(N)} \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathbb{B}^n. \tag{2.2}$$

The group $W_b \cap \Gamma \subset \Gamma_b$ acts on $S^{(N)}$ as the semi-direct product of two group actions, which can be described as follows. The first one of these is an action of $\mathbb{Z}$, defined by

$$k \cdot (z', z_n) = (z', z_n + k\tau),$$

where $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ is some parameter depending on b. Let $G^{(N)} = S^{(N)}/\mathbb{Z}$, with its natural analytic structure.

We have $G^{(N)} \cong \left\{(w', w_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*; ||(w', w_n)||_\mu < e^{-\frac{2\pi}{\tau}N}\right\}$. Here, $||\cdot||_\mu$ is a norm over the trivial vector bundle $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, defined so that the norm of w_n at the point $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$ is

$$||(w', w_n)||_\mu = |w_n| e^{\frac{2\pi}{\tau}||w'||^2}.$$

The projection is realized by the following holomorphic application :

$$\begin{array}{ccc} S^{(N)} & \xrightarrow{\Psi} & G^{(N)} \\ (z', z_n) & \longmapsto & \left(z', e^{\frac{2i\pi z_n}{\tau}}\right). \end{array}$$

Let $\widehat{G^{(N)}} = \left\{(w', w_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}; \|(w', w_n)\|_\mu < e^{-\frac{2\pi}{\tau}N}\right\}$. Thus, if we note $D_0 = \{w_n = 0\} \subset \widehat{G^{(N)}}$, we see easily that the differential of Ψ send surjectively $T_{S^{(N)}}$ onto $T_{G^{(N)}}(-\log D_0)$.

The second group action comes from a lattice $\Lambda_b \subset \mathbb{C}^{n-1}$, and can be written

$$a \cdot (z', z_n) = \left(z' + a, z_n + i\|a\|^2 + 2i\overline{a} \cdot z'\right),$$

for $a \in \Lambda_b$, $(z', z_n) \in S^{(N)}$. The group $W_b \cap \Gamma$ acts on $S^{(N)}$ as the semi-direct product of these two previous actions. Consequently, the action of Λ_b goes to the quotient $S^{(N)} \big/ \mathbb{Z} \cong G^{(N)}$, and we can write its action on $G^{(N)}$ as

$$a \cdot (w', w_n) = \left(w' + a, e^{-\frac{2\pi}{\tau}\|a\|^2} e^{-4\pi \frac{\overline{a} \cdot z'}{\tau}} w_n\right). \tag{2.3}$$

The action of Λ_b on $G^{(N)}$ extends naturally to an action on $\widehat{G^{(N)}}$. We can define the open manifold $\Omega_b^{(N)}$ to be the quotient $\Lambda_b \backslash \widehat{G^{(N)}}$.

The subspace $D_0 \subset \widehat{G^{(N)}}$ goes to the quotient by Λ_b, to give an abelian variety $D_b = \Lambda_b \backslash D_0 \hookrightarrow \Omega_b^{(N)}$. Moreover, the embedding (2.2) induces an embedding of the quotient

$$\Omega^{(N)} \smallsetminus D_b = \Lambda_b \backslash G^{(N)} \cong W_b \cap \Gamma \backslash S^{(N)} \hookrightarrow X.$$

The toroidal compactification of X constructed in [Mok12] is defined to be the glueing of the manifolds $\Omega_{b_i}^{(N)}$ on X along the open subsets $\Omega_{b_i}^{(N)} \smallsetminus T_{b_i}$, where the $b_i \in \partial\mathbb{B}^n$ span a family of representatives of the cusps. Let us denote by $\overline{X}$ this compactification. We see that, as sets, we have

$$\overline{X} = X \sqcup \bigsqcup_i D_{b_i}.$$

Let us denote by $D = \bigsqcup_i D_{b_i}$ the compactifying divisor of $\overline{X}$. This divisor is a disjoint union of abelian varieties.

As explained in [Mok12], each component of D can be blown-down to a normal isolated singularity, which yields a projective variety $\overline{X}_{min}$. The *minimal compactification* $\overline{X}_{min}$ is consequently obtained by adding a single point at each cusp of X, and in that sense, the compactification $\overline{X}$ is also minimal among all smooth compactifications of X.

Terminology.

1. Unless otherwise specified, a *ball quotient* will mean a smooth quotient of $\mathbb{B}^n$ by a torsion-free subgroup of $\mathrm{PU}(n, 1)$ with finite covolume and unipotent parabolic isometries.
2. Unless otherwise specified, a *minimal toroidal compactification* will always be a toroidal compactification of a ball quotient, as constructed in [Mok12] and as defined in this section.

2.3.2 Local coordinates. Bergman metric

Let D_b be a component of D, and let $w_0 \in D_b$ be any point of this component. In some neighborhood U of x_0, we can consider local coordinates (w', w_n), coming from the global coordinates on $\widehat{G_b^{(N)}}$. We will describe explicitly the action of Λ_b on the logarithmic tangent bundle of U in these coordinates.

First, we study the action of this group on $T_{G^{(N)}}(-\log D_0)$. By (2.3), it can be expressed as

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial}{\partial w'_i}\Big|_x & = \sum_j \frac{\partial w'^{\sharp}_j}{\partial w'_i} \frac{\partial}{\partial w'^{\sharp}_j}\Big|_{a\cdot x} + \frac{\partial w'^{\sharp}_j}{\partial w'_i} \frac{\partial}{\partial w'^{\sharp}_j}\Big|_{a\cdot x} = \frac{\partial}{\partial w'^{\sharp}_i} - \frac{4\pi \bar{a}_i}{\tau} w^{\sharp}_n \left(\frac{\partial}{\partial w^{\sharp}_n}\right)_{a\cdot x} \\ a \cdot \left(w_n \frac{\partial}{\partial w_n}\right)_x & = \left(w^{\sharp}_n \frac{\partial}{\partial w^{\sharp}_n}\right)_{a\cdot x} \end{cases},$$

where $(w^{\sharp}_i)$ is the family of coordinates at the point $a\cdot x$. After taking the quotient by Λ_b, we see that

$$(e_j)_{1\leq j\leq n} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial w_j} - \overline{w_j} \left(\frac{4\pi}{\tau} w_n \frac{\partial}{\partial w_n} \right) \right)_{1\leq j\leq n-1}, \frac{4\pi}{\tau} w_n \frac{\partial}{\partial w_n} \right)$$

is well defined on the whole $\Omega_b^{(N)}$, and realizes a *smooth* frame for $T_{\overline{X}}(-\log D)$ on $\Omega_b^{(N)}$ for some $N > 0$ large enough.

Recall that on the ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, with the standard coordinates $(z_1, ..., z_n)$, the Bergman metric is given by, up to a normalization choice :

$$h_{\text{Berg}} = \frac{(1 - \|z\|^2) \sum_j dz_j \otimes d\overline{z}_j + \left(\sum_j \overline{z_j} dz_j\right) \otimes \left(\sum_j z_j d\overline{z_j}\right)}{(1 - \|z\|^2)^2}. \tag{2.4}$$

With this particular choice of normalization, the metric has constant holomorphic sectional curvature equal to -4, and we also have $\text{Ric}(h_{\text{Berg}}) = -2(n+1)\omega_{\text{Berg}}$, where ω_{Berg} is the Kähler form associated with the Bergman metric.

The smooth frame $(e_j)_j$ permits to express the Bergman metric on $\Omega^{(N)} \setminus D_b$. Indeed, as we can see from [Mok12], we have the following proposition :

Proposition 2.3.1. *The Bergman metric h_{Berg} induces a singular hermitian metric on the logarithmic tangent bundle $T_{\overline{X}}(-\log D)$, whose expression in the frame $(e_j)_j$ admits the diagonal form*

$$(H_{ij}) \;=\; (h_{Berg}(e_i, e_j)) \;=\; \text{diag}(l(w)^{-1}, ..., l(w)^{-1}, l(w)^{-2}), \tag{2.5}$$

with, for any $w = (w', w_n) \in \Omega_b^{(N)} \setminus D_b$, $l(w) = -\frac{\tau}{4\pi} \log \|w\|^2_\mu$.

Remark. Even though the metric $\|\cdot\|_\mu$ is *a priori* defined only on $S^{(N)}$, it is invariant under the actions of $\mathbb{Z}$ and Λ_b, so it is legitimate to express the norm $\|w\|_\mu$ for any $w \in \Omega_b^{(N)} \setminus D_b$.

Later on, we will need to compute the intersection numbers of $K_{\overline{X}} + D$ in terms of the Bergman metric on $X \subset \overline{X}$. The following proposition, which comes from Mumford's work [Mum77], will be useful for this purpose.

Proposition 2.3.2. *Let $(\overline{X}, D)$ be a minimal toroidal compactification, and let $\overline{V} \xrightarrow{f} \overline{X}$ be a generically injective holomorphic map, from a compact complex manifold of dimension p, such that $f(\overline{V}) \not\subset D$. Let $V = f^{-1}(D)$. Then we have*

$$\left(K_{\overline{X}} + D\right)^p \cdot \left[f(\overline{V})\right] = \int_V \left(\frac{i}{2\pi} f^* \Theta(\det h^*_{Berg})\right)^p = \frac{(n+1)^p}{\pi^p} \int_V f^* \omega^p_{Berg}.$$

Proof. The second equality in this proposition simply comes from the fact that the Bergman metric is Kähler-Einstein with $\text{Ric}(h_{\text{Berg}}) = -2(n+1)\omega_{\text{Berg}}$. Let us describe how we can use [Mum77] to prove the first equality.

Let $\widetilde{V} \xrightarrow{\widetilde{f}} \overline{X}$ be a resolution of singularities of $f(V)$, dominating the map f, such that $D' = \widetilde{f}^{-1}(D \cup \text{Sing}\, f(V))$ is a divisor with simple normal crossings. Now, it follows from [Mum77] that the metric h_{Berg} is *good* on $T_{\overline{X}}(-\log D)$, with respect to the divisor D.

By definition, this means the following. Let Δ be any polydisk in $\overline{X}$, on which there are natural coordinates $(z_1, ..., z_n)$ such that $\Delta \cap D = \{z_1 ... z_m = 0\}$. Then $T_{\overline{X}}(-\log D)|_\Delta$ admits a local frame in which the matrix $h = (h_{i,j})$ trivializing h_{Berg} satisfies the following two properties :

(i) $|h_{i,j}|, (\det h)^{-1} \leq C\left(\sum_{i=1}^{m} \log|z_i|^2\right)^{2r}$, for some constant $C > 0$ and some $r \in \mathbb{N}^*$.

(ii) the components of $h^{-1}\partial h$ and $d(h^{-1}\partial h)$ have Poincaré growth near D.

Now, it is an direct computation to show that the previous two properties are satisfied by the metric $\widetilde{f}^* h_{\mathrm{Berg}}$ on the vector bundle $\widetilde{f}^* T_{\overline{X}}(-\log D)$, on any polydisk of $\widetilde{v}$ adapted to the reduced divisor D'_{red}. To show that the first condition holds locally, it suffices to remark that for some $q \in \mathbb{N}^*$, we always have a bound of the form $\widetilde{f}^*\left(\sum_{j=1}^{m} \log|z_i|^2\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{p} \log|z'_i|\right)^{2q}$, where $z'_1 \ldots z'_p = 0$ is a local equation for D'_{red}. To prove the second condition, we remark that the pull-back by $\widetilde{f}$ of the Poincaré metric on U has Poincaré growth near D'_{red}, which can be verified in local coordinates.

Thus, the metric $\widetilde{f}^* h_{\mathrm{Berg}}$ on the vector bundle $\widetilde{f}^* T_{\overline{X}}(-\log D)$ is *good* with respect to the divisor D'_{red}. By the results of [Mum77], the curvature of good metrics permits to compute the Chern classes of the associated vector bundles. In our case, this implies in particular that

$$\begin{aligned} c_1(\det \widetilde{f}^* \Omega_{\overline{X}}(\log D))^p \cdot \widetilde{V} &= \int_{\widetilde{V} \setminus D'_{\mathrm{red}}} \left(\frac{i}{2\pi} \Theta(\widetilde{f}^* \det h^*_{\mathrm{Berg}})\right)^p \\ &= \int_V \left(\frac{i}{2\pi} f^* \Theta(\det h^*_{\mathrm{Berg}})\right)^p \end{aligned}$$

Since $\widetilde{f}$ is proper onto $f(\overline{V})$, and since it is generically injective by our hypothesis, the p-cycle $\widetilde{f}_*[\widetilde{V}]$ is equal to $[f(\overline{V})]$. Thus, the projection formula yields

$$\begin{aligned} c_1(\det \widetilde{f}^* \Omega_{\overline{X}}(\log D))^p \cdot \left[\widetilde{V}\right] &= c_1(\det \Omega_{\overline{X}}(\log D))^p \cdot \left[f(\overline{V})\right] \\ &= (K_{\overline{X}} + D)^p \cdot \left[f(\overline{V})\right]. \end{aligned}$$

which gives the result. □

2.3.3 Bigness of the standard cotangent bundle of a compactification of a ball quotient

In this section, we prove Theorem 2.1.3, and we combine it with the results of Bakker and Tsimerman [BT15] to obtain Theorem 2.1.4.

Let us resume the notations and conventions introduced in Section 2.3.

Proof of Theorem 2.1.3. Suppose that the line bundle $L = K_{\overline{X}} + D - (n+1)D$ is big, and let $V \subset \overline{X}$ be a subvariety, such that $V \notin D \cup \mathbb{B}^+(L)$. Then, by hypothesis, there exists a rational number β such that the following properties are satisfied.

1. $\beta > n + 1$;
2. a high enough multiple of the $\mathbb{Q}$-divisor $K_{\overline{X}} + (1-\beta)D$ is effective ;
3. $V \notin \mathrm{Bs}\left(K_{\overline{X}} + (1-\beta)D\right)$.

Consequently, we can write $\beta = \frac{p}{q}$ with p and q high enough, and we can assume that $q\left(K_{\overline{X}} + D\right) - pD$ admits a section s, such that $s|_V$ does not vanish identically.

Since $\frac{p}{q} > n + 1$, we have $\frac{1}{p} < \frac{1}{(n+1)q}$, so we can choose a real number $\alpha \in \left]\frac{1}{p}, \frac{1}{(n+1)q}\right[$. Let g be the metric induced by h_{Berg} on the line bundle $\mathcal{O}\left(q\left(K_{\overline{X}} + D\right)\right)$, and let

$$\phi = ||s||_g^{2\alpha}.$$

Consider the singular metric $\widetilde{h}$ defined on $T_{\overline{X}}$ by $\widetilde{h} = \phi\, h_{Berg}$, and let h_V be its restriction to T_V (at the points where it is defined).

Lemma 2.3.3. *On $X \setminus s^{-1}(0)$, $\widetilde{h}$ has negative holomorphic sectional curvature, bounded by a constant $-A$, and non-positive bisectional curvature.*

Proof. Locally on $X \smallsetminus s^{-1}(0)$, we can write

$$\frac{i}{2}\Theta(\widetilde{h}) \overset{loc}{=} \frac{i}{2}\overline{\partial}\partial \log \phi \otimes I_n + \frac{i}{2}\Theta(h), \tag{2.6}$$

so, $s|_{X\smallsetminus s^{-1}(0)}$ being a non-vanishing section of the line bundle $\mathcal{O}(q(K_{\overline{X}} + D))$, we have

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\overline{\partial}\partial \log \phi &= \frac{i}{2}\ \alpha\ \overline{\partial}\partial \log \|s\|_g^2 \\ &= \frac{i}{2}\alpha\ q\ \Theta_{K_{\overline{X}+D}} \\ &= -\frac{q\alpha}{2}\ \mathrm{Ric}(h_{Berg}) \\ &= q\alpha(n+1)\ \omega_{Berg}\end{aligned}$$

To study the negativity of (2.6), we can reason locally, in the neighborhood of a point of X corresponding to $0 \in \mathbb{B}^n$, where ω_{Berg} admits the expression (2.4). Then, we can write $\frac{i}{2}\Theta(h_{Berg})$ matricially as

$$\frac{i}{2}\Theta(h_{Berg})_0 = -\omega_{Berg}\ I_n + \frac{i}{2}{}^t\overline{T} \wedge T,$$

with $T = (dz_1 ... dz_n)$. Since $q\alpha(n+1) < 1$, an easy calculation gives the result. □

Let $V_1 \xrightarrow{f_1} V$ be any resolution of V. If we let $Z = V_{sing} \cup D \cup s^{-1}(0)$, it is possible to find a resolution $\widetilde{V} \xrightarrow{f} V$, dominating f_1, such that the reduced divisor $f^{-1}(Z)_{red}$ has simple normal crossings. Since the holomorphic sectional curvature and the bisectional curvature decrease on submanifolds, Lemma 2.3.3 implies that h_V has negative holomorphic sectional curvature, bounded from above, and negative bisectional curvature on $\widetilde{V} \smallsetminus f^{-1}(Z)$.

Lemma 2.3.4. *For any $x \in \widetilde{V}$, and for any local vector field ξ of $T_{\widetilde{V}}$ defined on a neighborhood of x, $\|\xi\|_{h_V}$ is bounded in a neighborhood of x.*

Proof. We first see from [Mok12, Proposition 1], or from Proposition 2.3.1, that near the boundary, the metric g is bounded in the local canonical frame $\left(dw_1 \wedge dw_2 \wedge ... \wedge \frac{dw_n}{w_n}\right)^{\otimes q}$ of $\mathcal{O}(q(K_{\overline{X}} + D))$ as

$$\left\|\left(dw_1 \wedge ... \wedge \frac{dw_n}{w_n}\right)^{\otimes q}\right\|_g^2 \le C\ |\log|w_n||^{q(n+1)}. \tag{2.7}$$

If $x \notin f^{-1}(D)$, h_{Berg}, considered as a metric on $T_{\overline{X}'}$, is bounded in a neighborhood of $f(x)$, so the result is clear.

If $x \in f^{-1}(D)$, h_{Berg} having Poincaré growth with respect to D, we can write for any p near x :

$$\|f_*(\xi)\|_{Berg}^2(f(p)) \le \frac{C}{|w_n|^2 |\log|w_n||^2},$$

where w_n is some local coordinate around $f(x)$, defining D. Thus,

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{h_V}^2 &= \phi\ \|f_*(\xi)\|^2 \\ &\le C \frac{\|s\|_g^{2\alpha}}{|w_n|^2 |\log|w_n||^2}.\end{aligned}$$

Since s, seen as a section of $\mathcal{O}(q(K_{\overline{X}} + D))$, vanishes at order p on D, this last function is bounded by $\frac{|w_n|^{2p\alpha}}{|w_n|^2 |\log|w_n||^{2-2(n+1)q\alpha}}$, because of (2.7). Since $p\alpha > 1$, this gives the result. □

The end of the proof of Theorem 2.1.3 is now straightforward.

Because of Lemma 2.3.3 and Lemma 2.3.4, the metric h_V satisfies all four hypotheses of Theorem 2.2.1 on $\widetilde{V}$. Therefore, $\Omega_{\widetilde{V}}$ is big. Since the morphism $\widetilde{V} \longrightarrow V_1$ is proper and birational, it follows that Ω_{V_1} is big, which ends the proof. □

The proof of Theorem 2.1.4 will now come from the following result from [BT15].

Proposition 2.3.5 ([BT15])**.** *Let X' be a quotient of $\mathbb{B}^n$, and let $X \longrightarrow X'$ be an étale cover. Then X' is also a ball quotient. Suppose that the induced map $\overline{X} \longrightarrow \overline{X'}$ ramifies at orders higher than some positive integer l on the boundary. Then, for any $\beta > 0$ such that*

1. *$\beta \leq l$ if $n \in [\![4,5]\!]$;*
2. *$\beta < \frac{n+1}{2\pi} l$ if $n \geq 6$,*

the divisor $K_{\overline{X}} + (1-\beta)D$ is nef and big.

Proof. Denote by π the projection $\overline{X} \longrightarrow \overline{X}'$. Suppose first that $n \geq 6$, and let $\alpha \in \left]\frac{\beta}{l}, \frac{n+1}{2\pi}\right[$. Then, we have :

$$\begin{aligned}\pi^*\left(K_{\overline{X'}} + (1-\alpha)\,D'\right) &= K_{\overline{X}} + D - \alpha\pi^* D' \\ &\leq K_{\overline{X}} + D - \alpha l D \\ &\leq K_{\overline{X}} + (1-\beta)D,\end{aligned}$$

where by " $\leq$ " we mean that the two divisors differ by some linear combination with non-negative coefficients of components of D.

The divisor of the left hand side is big by [BT15], thus so is the right hand side divisor. Moreover, because of our definition of the relation $\leq$, it is easy to see that the intersection number of $K_{\overline{X}}+(1-\beta)D$ with any curve not included in D is non-negative. Besides, since $\mathcal{O}_{\overline{X}}\left(K_{\overline{X}} + D\right)\big|_D \cong \mathcal{O}_D$ and $D|_D$ being negative (see [Mok12]), we see that for any curve $C \subset D$, we must have $\left[K_{\overline{X}} + (1-\beta)D\right] \cdot C \geq 0$. This proves that $K_{\overline{X}} + (1-\beta)D$ is nef.

In the case $n \in [\![4,5]\!]$, we reason similarly, writing

$$\pi^* K_{\overline{X'}} \leq K_{\overline{X}} + (1-\beta)D,$$

and using the fact that $K_{\overline{X'}}$ is nef and big by [BT15] and [CC15a]. □ □

Using this proposition, we can immediately apply the base-point free theorem (see [KM98]), to obtain the following lemma.

Lemma 2.3.6. *With the same hypotheses as in Proposition 2.3.5, assume that β is a rational number satisfying $\beta < l$ if $n \in [\![4,5]\!]$, and $\beta < \frac{n+1}{2\pi} l$ otherwise. Then, for any $m \in \mathbb{N}^*$ large enough, the line bundle $\mathcal{O}\left(m\left[K_{\overline{X}} + (1-\beta)D\right]\right)$ is base-point free.*

This lemma is the final step towards the proof of Theorem 2.1.4.

Proof of Theorem 2.1.4. Lemma 2.3.6 shows that if $l > n+1$ when $n \in [\![4,5]\!]$, or if $l > 2\pi$ in the other cases, then the augmented base locus of $L = K_{\overline{X}} + D - (n+1)D$ is empty. Combined with Theorem 2.1.3, this proves Theorem 2.1.4. □

Remark. There are many other singular metrics which could satisfy the hypotheses of Theorem 2.2.1. Let us mention another possible choice, resembling one already used in [BT15]. As explained in Section 2.3.2 and in [Mok12], each component of T_b of the boundary admits a tubular neighborhood $\Omega_b^{(N)}$, for N large enough, on which ω_{Berg} is given by the potential $l(w) = -\frac{4\pi}{\tau_b} \log \|w\|^2$, i.e. $\omega_{Berg} = \frac{i}{2}\overline{\partial}\partial \log l$.

We define a metric on T_X by $\widetilde{h} = e^{-\chi(l)} h_{Berg}$ on $\Omega_b^{(N_b)}$, where $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function such that $t \mapsto \chi(t) + \log t$ approximates $t \mapsto \log(t)$ on $]0, N_b]$ and the tangent line to $t \mapsto \log(t)$ at N_b on $]N_b, +\infty[$.

Now, $\widetilde{h}$ equals h outside $\Omega_b^{(N)}$, and since $t \mapsto -(\log(t) + \chi(t))$ is convex, we see that

$$\omega_{Berg} + \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\chi(l) = -\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}(\log l + \chi(l)) \geq 0.$$

Thus, the bisectional curvature of h_{Berg} being larger or equal to -4, we conclude, e.g. by applying (1.5), that the holomorphic sectional curvature of the metric $\widehat{h}$, induced by $\widetilde{h}$ on $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}(T_X)$, is non-negative. Now, if $p = (x, [v])$ is a point of $\mathbb{P}(T_{\overline{X}})$ with $x \in D$, we have the following asymptotic bound at p :

$$\log \widehat{h} \leq -\log |w_n|^2 - \chi(l) + \underset{|w_n| \longrightarrow 0}{O(1)} \leq \left|\log |w_n|^2\right| - \frac{l}{N} + \underset{|w_n| \longrightarrow 0}{O(1)},$$

where we used the fact that the eigenvalues of h_{Berg} grow at most like $-\log|w_n|^2 - \log(-\log|w_n|^2)$ near the boundary, by (2.5). Finally, $l(w) \underset{|w_n| \sim 0}{\sim} \frac{\tau}{4\pi}(-\log|w_n|^2)$, and we see that $\widetilde{h}$ will be bounded provided $\frac{\tau}{4\pi N} < 1$.

If we can take uniformly $N_b < \frac{\tau_b}{4\pi}$ for each cusp C_b, the singular metric $\widetilde{h}$ will be bounded everywhere, and $\widehat{h}$ will satisfy the hypotheses of Theorem 2.2.1. By [Par98], we can take in any case $N_b = \frac{\tau_b}{2}$ uniformly. Now, consider an étale cover $X \longrightarrow X'$ ramifying at an order $l \geq 7$ over a boundary component $T_{b'} \subset \overline{X'}$. Let $T_b \subset \overline{X}$ be a boundary component projecting to $T_{b'}$. We see from the description in local coordinates that $\tau_{b'} = l\,\tau_b$, and that $N_b = N_{b'}$ is an admissible horoball size at the cusp b. Consequently, we have $N_b = \frac{1}{l}\frac{\tau_{b'}}{2} < \frac{\tau_b}{4\pi}$, and the singular metric $\widetilde{h}$ on $T_{\overline{X}}$ satisfies all our requirements.

While we could have used this choice of singular metric to prove Theorem 2.1.4, our previous choice uses the bigness of $K_{\overline{X}}$ when $n \geq 4$, provided by [BT15]. This gives a better bound in dimension 4 ; we would similarly obtain the better bound $l \geq 5$ in dimension 3 if it were proved that all toroidal compactifications of this dimension are of general type.

2.4 Birational transformation between logarithmic and standard projectivized tangent bundles

In this section, we introduce a construction that will be useful in Section 2.5, when we study the nefness of the cotangent bundle of a minimal toroidal compactification of a ball quotient.

The plan of our work in the next sections is straightforward : we will first show that the logarithmic cotangent bundle of a minimal toroidal compactification is nef, using Proposition 2.2.2, and then use this result to study the standard cotangent bundle. To do this, we will resolve the birational map $\mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}(-\log D)\right) \dashrightarrow \mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}\right)$ into a sequence of two birational morphisms :

$$\mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}(-\log D)\right) \xleftarrow{\pi} \widetilde{Y} \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{P}\left(T_{\overline{X}}\right). \tag{2.8}$$

With this construction, it will not be hard to express the pullbacks of the two tautological line bundles onto $\widetilde{Y}$, in term of each other. Therefore, we will be able later on to deduce a condition for $\Omega_{\overline{X}}$ to be nef (i.e. for the line bundle $\mathcal{O}(1)_0 \longrightarrow \mathbb{P}(T_{\overline{X}}(-\log D))$) to be nef), knowing that $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ is nef (i.e. that the tautological bundle $\mathcal{O}(1)_{\log} \longrightarrow \mathbb{P}(T_{\overline{X}}(-\log D))$ is nef).

In the rest of the section, we describe the resolution (2.8) : in fact, it holds for more general log-pairs than minimal toroidal compactifications. We show actually that for any log-pair (X, D) with *smooth boundary*, there is a canonical way to resolve the map $\mathbb{P}(T_X(-\log D)) \dashrightarrow \mathbb{P}(T_X)$, by blowing up a single smooth analytic subset in each of these two manifolds.

Terminology and conventions. For our purposes, we will have to switch regularly between the algebraic and geometric conventions for projectivized bundles. Let us briefly sum up these conventions.

Let X denote a general scheme, and let $\mathcal{E}$ be a graded $\mathcal{O}_X$-algebra. Define the X-scheme $\mathrm{Proj}_X\ (\mathcal{E})$ in the usual way (see for example [Har77]). Then, if E is a vector bundle on X, $\mathbb{P}_X\,(E)$ will denote the projectivized bundle of *lines* of E, and $\mathbb{P}^*_X(E)$ will denotes its projectivized bundle of *hyperplanes*. We have the following natural isomorphisms :

$$\mathbb{P}_X(E) \cong \mathbb{P}^*_X(E^*) \cong \mathrm{Proj}_X(\mathrm{Sym}\, E^*).$$

2.4.1 Resolution of the rational maps

For the rest of the section, (X,D) will be a log-pair with smooth boundary. We will denote by $Y = \mathbb{P}(T_X(-\log D))$ the projectivized bundle of the logarithmic tangent bundle, with its associated tautological bundle $\mathcal{O}_Y(1)$. In the same way, let $Y_0 = \mathbb{P}(T_X)$, and let $\mathcal{O}_{Y_0}(1)$ be its tautological bundle. We will denote by $p : Y \longrightarrow X$ and $p_0 : Y_0 \longrightarrow X$ the canonical projections.

As announced before, we will prove that the natural birational map $Y \dashrightarrow Y_0$ can be resolved by blowing-up only one subvariety on Y and on Y_0. Let us first describe these two subvarieties.

Logarithmic exact sequence. Rational map $Y \dashrightarrow Y_0$
On X, we have the usual logarithmic cotangent exact sequence :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_X(\log D) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{O}_D \longrightarrow 0, \tag{2.9}$$

the last arrow being the Poincaré residue map.

The surjective morphism $\Omega_X(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_D$ induces a section of the projection

$$p^{-1}(D) = \mathbb{P}^*(\Omega_X(\log D)|_D) \longrightarrow D,$$

whose image we will denote by Z.

The sequence (2.9) permits to write the following exact sequence of graded $\mathcal{O}_X$-algebras :

$$\Omega_X \odot \mathrm{Sym}\, \Omega_X(\log D) \longrightarrow \mathrm{Sym}\, \Omega_X(\log D) \xrightarrow{v} \mathrm{Sym}\, \mathcal{O}_D \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

The injection $Z \hookrightarrow Y$ is actually induced by the surjective morphism v, which determines a morphism of projective spaces over X :

$$D \simeq \mathbb{P}^*_X(\mathcal{O}_D) \hookrightarrow \mathbb{P}^*_X(\Omega_X(\log D)).$$

By functoriality of the tautological bundles, we see that $\mathcal{O}_Y(1)|_Z$ is isomorphic to the tautological bundle of $\mathbb{P}^*_X(\mathcal{O}_D)$, i.e. is trivial.

Therefore, the sequence (2.10) gives the following exact sequence of $\mathcal{O}_Y$-modules

$$p^*\Omega_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0,$$

or, twisting by $\mathcal{O}_Y(-1)$:

$$p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(-1) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0, \tag{2.11}$$

and we see in particular that $\mathcal{I}_Z$, the ideal sheaf of Z, is the image of the morphism ι.

The morphism of $\mathcal{O}_Y$-modules $p^*\Omega_X \xrightarrow{\iota \otimes Id_{\mathcal{O}(1)}} \mathcal{O}_Y(1)$ induces a map $\mathbb{P}(T_X(-\log D)) \overset{\Psi_0}{\dashrightarrow} \mathbb{P}(T_X)$ which is the rational map we are studying. Since this morphism is not surjective, this map is not globally defined. Actually, by (2.11), the image of $\iota \otimes Id_{\mathcal{O}(1)}$ is $\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{O}_Y(1)$. This shows that the locus of indeterminacy of Ψ_0 is Z, and that this map can be resolved by blowing up at Z, to give a well-defined morphism

$$\mathrm{Bl}_Z Y \xrightarrow{\Psi} Y_0.$$

Let $\widetilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y$ be the blowing-up of Y at Z, with its canonical projection, and let $E \subset \widetilde{Y}$ be the exceptional divisor.

Remark. Let $(\overline{X}, D)$ be a minimal toroidal compactification. With the notations of Section 2.3, the embedding $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{D_b}) \hookrightarrow \mathbb{P}(T_{\overline{X}}(-\log D))$ is given locally by

$$x \in D = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{D_b}) \mapsto \left(x, \left[w_n \frac{\partial}{\partial w_n}\right]\right),$$

so the indeterminacy locus of $\mathbb{P}_{\overline{X}}\left(T_{\overline{X}}(-\log D)\right) \dashrightarrow \mathbb{P}_{\overline{X}}\left(T_{\overline{X}}\right)$ is

$$Z = \bigsqcup_b \left\{\left(x, \left[w_n \frac{\partial}{\partial w_n}\right]\right);\ x \in D_b\right\}.$$

The rational map $Y_0 \dashrightarrow Y$.
In a similar way, we can write the following exact sequence :

$$0 \longrightarrow \Omega_X(\log D) \otimes \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_D \longrightarrow 0, \tag{2.12}$$

whose last arrow is given by the restriction to T_D, and the first arrow is given in local coordinates by

$$\left(\sum_i v_i dz_i + v_n \frac{dz_n}{z_n}\right) \otimes z_n \mapsto \sum_i (z_n v_i) dz_i + v_n dz_n,$$

where $(z_1, ..., z_n)$ are local coordinates such that z_n is an equation for D. Exactly as before, the last arrow induces a closed immersion $\mathbb{P}_D(T_D) \cong \mathbb{P}^*_X(\Omega_D) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(T_X)$, whose image we will denote by Z_0. The first arrow also induces a rational map $\Phi_0 : \mathbb{P}_X(T_X) \dashrightarrow \mathbb{P}_X\left(T_X(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D)\right)$, with indeterminacy locus Z_0, which can be resolved by a blowing-up at Z_0. Let $\Phi : \mathrm{Bl}_{Z_0} Y_0 \longrightarrow \mathbb{P}\left(T_X(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D)\right)$ be the induced map.

We will now prove that the morphism $\mathrm{Bl}_Z Y \longrightarrow Y_0$ factors through the blowing-up $\mathrm{Bl}_{Z_0} Y_0 \longrightarrow Y_0$. To see this, we use the universal property of blowing-ups (see [Har77]).

Let $\Psi^* \mathcal{I}_{Z_0} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ be the sheaf of ideals of $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ generated by the image of $\mathcal{I}_{Z_0}$ under the natural map $\Psi^* \mathcal{O}_{Y_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$.

Proposition 2.4.1. *The sheaf of ideals $\Psi^* \mathcal{I}_{Z_0} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} \subset \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ is invertible on $\widetilde{Y}$.*

Proof. We have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"] & Y_0 \arrow[d, "p_0"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Let $j = \iota \otimes Id_{\mathcal{O}(1)} : p^* \Omega_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1)$. The morphism Ψ is determined by the surjective morphism of $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$-modules

$$\pi^* p^* \Omega_X \xrightarrow{\pi^* j} \pi^* \mathcal{I}_Z \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1) \ = \ \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1).$$

By general properties of projective morphisms, $\pi^* j$ factors through $\Psi^* \mathcal{O}_{Y_0}(1)$, into a composite morphism

$$\pi^* p^* \Omega_X \longrightarrow \Psi^* \mathcal{O}_{Y_0}(1) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1). \tag{2.13}$$

Remark first that v is a surjective morphism of invertible sheaves on $\widetilde{Y}$: it is consequently an isomorphism.

Let us determine $\mathcal{J}$, the image of $\Psi^*(\mathcal{I}_{Z_0} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}(1))$ by v. Similarly to what we see for $\mathcal{I}_Z$, the $\mathcal{O}_{Y_0}$-module $\mathcal{I}_{Z_0} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}(1)$ is the image of the morphism

$$p_0^* [\Omega_X (\log D) \otimes \mathcal{O}(-D)] \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_0}(1),$$

so, since $p \circ \pi = p_0 \circ \Psi$, the image of $\Psi^* [\mathcal{I}_{Z_0} \circ \mathcal{O}_{Y_0}(1)]$ under v is the image of the composition

$$\pi^* p^* [\Omega_X (\log D) \otimes \mathcal{O}(-D)] \longrightarrow \Psi^* \mathcal{O}_{Y_0}(1) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1).$$

Now, we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\pi^* p^* [\Omega_X(\log D) \otimes \mathcal{O}(-D)] \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi^* p^* \Omega \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1) \arrow[d] \\
\pi^* p^* [\Omega_X(\log D) \otimes \mathcal{O}(-D)] \arrow[r] & \pi^* p^* \Omega_X(\log D) \arrow[r] & \pi^* \mathcal{O}_Y(1)
\end{tikzcd}$$

According to what we just said, the image of the composition of the two maps at the top is $\mathcal{J}$. The image of the composition of the two maps at the bottom is

$$\begin{aligned}
\pi^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \pi^* p^* \mathcal{O}(-D) &= \pi^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}(-p^{-1}(D)) \\
&= \pi^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}(-\widetilde{p^{-1}(D)} - E),
\end{aligned}$$

where $\widetilde{p^{-1}(D)}$ is the strict transform of $p^{-1}(D)$ under the blowing-up π. Hence, we find

$$\mathcal{J} = \pi^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}(-E) \otimes \mathcal{O}(-\widetilde{p^{-1}(D)}).$$

Twisting by $\Psi^* \mathcal{O}_{Y_0}(-1) \simeq \mathcal{O}(E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(-1)$, we obtain

$$\Psi^* \mathcal{I}_{Z_0} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(E) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}\left(-\widetilde{p^{-1}(D)}\right).$$

Since $p^{-1}(D)$ is a divisor on Y, the subscheme $\widetilde{p^{-1}(D)}$ is also a divisor, and its ideal sheaf is invertible. This proves the result. $\square$

By the previous proposition, the universal property of blowing-ups (see [Har77]) implies that the morphism $\Psi : \widetilde{Y} = \mathrm{Bl}_Z(Y) \longrightarrow Y_0$ factors through $\mathrm{Bl}_{Z_0}(Y_0) \longrightarrow Y_0$.

Hence, there is a morphism $\mathrm{Bl}_Z(Y) \xrightarrow{\widetilde{\Psi}} \mathrm{Bl}_{Z_0}(Y)$, lifting and resolving the birational map Ψ_0. In the same manner, we prove that there exists a morphism

$$\mathrm{Bl}_{Z_0}(Y) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}(D))} \mathbb{P}(T_X(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D))$$

lifting and resolving the map Φ_0.

Since $\mathbb{P}_X(T_X(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D))$ is canonically isomorphic to Y, and since the two subvarieties $\mathbb{P}(\mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}(-D))$ and $\mathbb{P}(\mathcal{O}_D)$ are image of each other *via* this isomorphism, we see that $\widetilde{\Phi}$ and $\widetilde{\Psi}$ must be biholomorphic, and inverse of each other modulo the natural isomorphism

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_D(D))} \mathbb{P}(T_X(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Bl}_Z Y.$$

Therefore, we obtain the following result.

Proposition 2.4.2. *Let (X, D) be a log-pair with smooth boundary, let $Y = \mathbb{P}(T_X(-\log D)) \xrightarrow{p} X$ and $Y_0 = \mathbb{P}(T_X) \xrightarrow{p_0} X$, the logarithmic and standard projectivized tangent bundles. The projection map $p|_{p^{-1}(D)}$ admits a section, realizing a closed immersion $D \longrightarrow Y$, whose image we will denote* *by Z. Denote by Z_0 the image of the canonical closed immersion $\mathbb{P}(T_D) \hookrightarrow \mathbb{P}(T_X)$. Then the natural birational map $Y \dashrightarrow Y_0$ induces an isomorphism of projective manifolds :*

$$\mathrm{Bl}_Z Y \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Bl}_{Z_0} Y_0.$$

Moreover, if $\pi : \mathrm{Bl}_Z Y \longrightarrow Y$ and $\pi_0 : \mathrm{Bl}_{Z_0} Y_0 \longrightarrow Y_0$ denote the respective blowing-ups, then the strict transform of $p^{-1}(D)$ corresponds under this isomorphism to the exceptional divisor of π_0. In the same manner, the strict transform of $p_0^{-1}(D)$ under π_0 corresponds to the exceptional divisor of π.

Proof. We proved the first part of the proposition in the previous discussion. The claim about the exceptional divisor of π_0 follows easily from our proof of the invertibility of $\Psi^* \mathcal{I}_{Z_0} \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_Z Y}$, with the same notations than before. The result for the exceptional divisor of π follows in the same way. □

Keep the same notations as before, and let E, E_0 be the exceptional divisors of the respective projections π, π_0.

Proposition 2.4.3. *On $\widetilde{Y}$, we have the following isomorphism of line bundles :*

$$\pi^* \mathcal{O}_Y(1) \simeq \pi_0^* \mathcal{O}_{Y_0}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} \mathcal{O}(E)$$

Proof. This isomorphism is just the morphism v appearing in (2.13), restated with the new notation $\pi_0 = \Psi$. □

Proposition 2.4.4. *The restriction of $\pi^* \mathcal{O}_Y(1)$ to E is trivial.*

Proof. We already saw that $\mathcal{O}_Y(1)|_Z$ is trivial. Thus, it is clear that $\pi^* \mathcal{O}_Y(1)$ is trivial when restricted to $E = \pi^{-1}(Z)$. □

We see from this result that if $W \subset Y_0$ is a subvariety with strict transform under π_0 denoted by $\widetilde{W}$, we can compute the maximal intersection of $\mathcal{O}_{Y_0}(1)$ with W in terms of intersection numbers of $\widetilde{W}$ with $\pi^* \mathcal{O}_Y(1)$ and E. Indeed, we have

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{O}_{Y_0}(1))^{\dim W} \cdot W &= c_1(\pi_0^* \mathcal{O}_{Y_0}(1))^{\dim W} \cdot \widetilde{W} \\ &= c_1(\pi^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}(-E))^{\dim W} \cdot \widetilde{W} \\ &= c_1(\pi^* \mathcal{O}_Y(1))^{\dim W} \cdot \widetilde{W} + (-1)^{\dim W} E^{\dim W} \cdot \widetilde{W} \\ &= c_1(\mathcal{O}_Y(1))^{\dim W} \cdot \pi(\widetilde{W}) + (-1)^{\dim W} E^{\dim W} \cdot \widetilde{W}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

We will see in the next sections that in the case where $(\overline{X}, D)$ is a minimal toroidal compactification, we can estimate the first term of the right hand side of this last equation, in terms of the Bergman metric on $\overline{X} \smallsetminus D$. As for the second member, we can prove a more general result, for any log-pair with smooth boundary. To estimate the intersection numbers with $E \subset \widetilde{Y}$, we must first determine the normal bundle $N_{E/\widetilde{Y}}$.

Proposition 2.4.5. *There is a canonical isomorphism*

$$N^*_{Z/Y} \simeq p^* \left(\Omega_X|_D \right). \tag{2.15}$$

Proof. As we saw earlier, there is an exact sequence of $\mathcal{O}_Y$-modules

$$p^* \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(-1) \xrightarrow{\iota} \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

which gives, after taking the tensor product with $\mathcal{O}_Z$:

$$(p^* \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(-1)) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Because of Proposition 2.4.4, $\mathcal{O}_Y(-1) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_Z$, so the previous surjective map becomes

$$p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0,$$

We have $\mathcal{I}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \simeq N^*_{Z/Y}$ as $\mathcal{O}_Z$-modules, and the following isomorphism of locally free sheaves holds on Z :

$$p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z \simeq p^*\left(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D\right).$$

Therefore, we get the following surjective morphism of locally free sheaves of $\mathcal{O}_Z$-modules :

$$p^*\left(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D\right) \twoheadrightarrow N^*_{Z/Y}.$$

Since a surjective morphism between two locally free $\mathcal{O}_Z$-modules of the same rank is an isomorphism, this gives the result. □

The exceptional divisor is isomorphic, as a D-scheme, to $\mathbb{P}(N_{Z/Y}) = \mathbb{P}^*(N^*_{Z/Y})$. We saw in Proposition 2.4.2 that the canonical isomorphism $\mathrm{Bl}_Z Y \cong \mathrm{Bl}_{Z_0} Y_0$ associates E with the strict transform of $p_0^{-1}(D)$ under π_0. Since $\mathbb{P}(T_D)$ has codimension one in $p_0^{-1}(D)$, this strict transform is actually isomorphic to $p_0^{-1}(D)$. Therefore,

$$\Psi|_E : E \longrightarrow p_0^{-1}(D) \simeq \mathbb{P}(\Omega_X|_D) \tag{2.16}$$

is an isomorphism. It makes sense to ask whether it is induced by the isomorphism of vector bundles of (2.15). The next proposition shows that it is actually the case.

Proposition 2.4.6. *When restricted to E, the morphism π_0 induces an isomorphism $E \longrightarrow p_0^{-1}(D) \cong \mathbb{P}(\Omega_X|_D)$, determined by the isomorphism of $\mathcal{O}_E$-modules* (2.15)*.*

Proof. The morphism π_0 is induced by the following morphism of $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$-modules :

$$\pi^*\left(p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(-1)\right) \xrightarrow{\pi^*\iota} \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} \cong \pi^*\mathcal{I}_Z.$$

If we take the tensor product with $\mathcal{O}_E$, since $\pi^*\mathcal{O}_Y(-1)|_E$ is trivial, we get a morphism of $\mathcal{O}_E$-modules

$$\pi^*p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} \mathcal{O}_E \longrightarrow \pi^*\mathcal{I}_Z \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} \mathcal{O}_E.$$

which, according to the projection formula, can be seen as a morphism of the form

$$\pi^*(p^*\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z) \longrightarrow \pi^*\left(\mathcal{I}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z\right).$$

This is induced by the isomorphism of Proposition 2.4.5. Consequently, we see that the isomorphism $\pi_0|_E : E \longrightarrow p_0^{-1}(D) = \mathbb{P}(\Omega_X|_D)$ is induced by (2.15), as we claimed. □

2.5 Nefness of the cotangent bundles

In the rest of this section, $\overline{X}$ will be a minimal toroidal compactification of a ball quotient. With what has been introduced until now, we can use the results of [BT15] to determine a condition for $\Omega_{\overline{X}}$ to be nef. For this, we let $\overline{Y} = \mathbb{P}_{\overline{X}}(T_{\overline{X}}(-\log D))$, with its canonical projection p and tautological bundle $\mathcal{O}(1)_{\log}$, and $\overline{Y}_0 = \mathbb{P}_{\overline{X}}(T_{\overline{X}})$, with its projection p_0 and tautological bundle $\mathcal{O}(1)_0$. Let $\widehat{h}$ be the metric induced by h_{Berg} on the tautological bundle $\mathcal{O}(1)_{X\smallsetminus D}$ of the projectivized bundle $Y = \mathbb{P}(T_{X\smallsetminus D})$, which is an open subset in both $\overline{Y}$ and $\overline{Y_0}$.

We start by proving that $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ is always nef.

Proof of Theorem 2.1.5. Let $C \subset \overline{Y}$ be an irreducible curve. If $C \not\subset p^{-1}(D)$, it follows from Proposition 2.2.2 that $c_1\mathcal{O}(1)_{\log} \cdot C \geq 0$.

If $C \subset p^{-1}(D) = \mathbb{P}(T_{\overline{X}}(-\log D)|_D)$, the result is given by the next lemma. □

Lemma 2.5.1. *The restriction* $\Omega_{\overline{X}}(\log D)\big|_D$ *is nef.*

Proof. This is a basic application of the properties of the logarithmic conormal sequence. Recall that since D is smooth, we have the following exact sequence of locally free $\mathcal{O}_D$-modules :

$$0 \longrightarrow \Omega_D \longrightarrow \Omega_{\overline{X}}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

This can be seen directly in coordinates, the second map sending $\sum_{1\leq i\leq n} a_i dz_i + a_n \frac{dz_n}{z_n}$ to a_n, or by tensoring the Poincaré residue exact sequence by $\mathcal{O}_D$.

Since the boundary is made of abelian varieties, Ω_D is trivial on any component of D. Consequently, the vector bundle $\Omega_{\overline{X}}(\log D)|_D$ is an extension of trivial vector bundles, hence is nef (see for example [Laz04b]). □

Let us mention the following result, first step in our study of the nefness of $\Omega_{\overline{X}}$.

Proposition 2.5.2. *The restriction* $\Omega_{\overline{X}}\big|_D$ *is a nef vector bundle on* D.

Proof. As stated in [Mok12], for any component D_b of D, the neighborhoods $\Omega_b^{(N)}$ introduced in Section 2.3 are isomorphic to tubular neighborhoods of the zero section of the normal bundle $N_b \longrightarrow D_b$. Consequently, we have

$$\Omega_{\overline{X}}\big|_{D_b} \simeq N_b^* \oplus \Omega_{D_b} \simeq N_b^* \oplus \mathcal{O}_D^{\oplus n-1}, \tag{2.17}$$

since D_b is an abelian variety. Moreover, for any such component D_b, the conormal bundle N_b^* is positive, since such a component contracts to a single point in the Baily-Borel compactification (see [Mok12]). Thus, $\Omega_{\overline{X}}\big|_{D_b}$ is sum of a trivial bundle and of an ample bundle on D_b, hence is nef. □

We will now make use of the results we proved in Section 2.4 to estimate the intersection numbers of the type $c_1\mathcal{O}(1)_0 \cdot C$, where C is a curve of $\overline{Y}_0$, not included in the boundary. To do this, we will pull back all our objects to the blowing-up $\mathrm{Bl}_Z\overline{Y}$. Let $\widetilde{Y}$ denotes this blowing-up, that we endow with its natural projections π and π_0, respectively onto $\overline{Y}$ and $\overline{Y}_0$.

Proposition 2.5.3. *Let* $C \subset \overline{Y}$ *be a curve such that* $p_0(C) \notin D$. *Then*

$$c_1\mathcal{O}(1)_0 \cdot C \geq \left(\frac{1}{n+1}\left(K_{\overline{X}} + D\right) - D\right) \cdot p_0(C).$$

Proof. We denote by $\widetilde{C}$ the proper transform of the curve C by the blowing-up π_0. Then Proposition 2.4.3 gives

$$\begin{aligned} c_1\mathcal{O}(1)_0 \cdot C &= \pi_0^* \left(c_1\mathcal{O}(1)_0\right) \cdot \widetilde{C} \\ &= \pi^* \left(c_1\mathcal{O}(1)_{\log} - E\right) \cdot \widetilde{C}, \end{aligned}$$

Moreover, thanks to Proposition 2.2.2, we obtain

$$\begin{aligned} \pi^* \left(c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right) \cdot \widetilde{C} &= c_1\mathcal{O}(1)_{\log} \cdot \pi(\widetilde{C}) \\ &\geq \int_{Y\cap\pi(\widetilde{C})} \frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*) \\ &= \int_{Y\cap C} \frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*). \end{aligned}$$

The Bergman metric being of constant sectional curvature equal to -4 with our choice of normalization, the following equality is true at any point $(x,[v]) \in Y$, for any $\xi \in T_{(x,[v])}Y$:

$$\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)_{(x,[v])} \cdot (\xi,\xi) \geq -\frac{i}{2\pi}\frac{\Theta_{T_X}(v,v,\xi,\xi)}{\|v\|^2} \geq \frac{1}{\pi}\omega_{Berg}(\xi,\xi),$$

so

$$\pi^* \left(c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right) \cdot \widetilde{C} \geq \int_{X\cap p_0(C)} \frac{1}{\pi}\omega_{Berg}.$$

However, because of Proposition 2.3.2, we obtain

$$\int_{X\cap p_0(C)} \frac{1}{\pi}\omega_{Berg} = \frac{1}{n+1}(K_{\overline{X}} + D)\cdot C.$$

Besides, since E is an disjoint union of irreducible components of $(p\circ\pi)^{-1}(D)$, we have

$$\begin{aligned} E\cdot\widetilde{C} &\leq (p\circ\pi)^{-1}(D)\cdot\widetilde{C} \\ &= D\cdot(p\circ\pi)(\widetilde{C}) \\ &= D\cdot p_0(C). \end{aligned}$$

where we used the projection formula at the second line. □

We can now prove our main result on the nefness of $\Omega_{\overline{X}}$.

Proof of Theorem 2.1.6 . Consider an irreducible curve $C\subset\overline{Y_0}$. First assume that $p_0(C)\subset D$. According to Proposition 2.5.2, the bundle $\Omega_{\overline{X}}\big|_D$ is nef. Since C can be seen as a curve of the projective space $\mathbb{P}(T_{\overline{X}}\big|_D)$, we see that $\int_C c_1\mathcal{O}(1)_0 \geq 0$.

Assume now that $C\cap Y \neq \varnothing$. Then, according to Proposition 2.5.3, we have

$$\int_C c_1\mathcal{O}(1)_0 \geq \frac{1}{n+1}\int_{p_0(C)} c_1\left(K_{\overline{X}} + (1-(n+1))\,D\right).$$

In addition, since σ ramifies to an order larger than 7 along the boundary, we have

$$\int_{p_0(C)} c_1\left(K_{\overline{X}} + (1-(n+1))\,D\right) \geq \int_{p_0(C)} c_1\left(\sigma^*\left(K_{\overline{X}'} + D'\right) - \frac{n+1}{7}\sigma^* D'\right).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \int_{p_0(C)} c_1\left(K_{\overline{X}} + (1-(n+1))\,D\right) &\geq (\deg\sigma)\int_{\sigma(p_0(C))} c_1\left(K_{\overline{X}'} + \left(1-\frac{n+1}{7}\right)D'\right) \\ &\geq (\deg\sigma)\int_{\sigma(p_0(C))} c_1\left(K_{\overline{X}'} + \left(1-\frac{n+1}{2\pi}\right)D'\right), \end{aligned} \tag{2.18}$$

since $(D\cdot(\sigma\circ p_0(C)))\geq 0$ (the divisor D and the curve $\sigma\circ p_0(C)$ are in normal intersection). The line bundle $K_{\overline{X}}+\left(1-\frac{n+1}{2\pi}\right)D$ is nef by Theorem 0.2.4 (see [BT15]), so the last term of (2.18) is non-negative, which gives the result. □

2.6 Immersed submanifolds of $\overline{X}$

We know turn to the proof of Corollary 2.1.7. As recalled in [CC15c], we can use a theorem of Nakamaye ([Nak00], see also [Laz04b, Theorem 10.3.5]) characterizing the augmented base locus of a big and nef line bundle, to obtain a simple criterion on the ampleness modulo an analytic subset of a line bundle.

Proposition 2.6.1 (cf. [CC15c])**.** *Let (X,D) be a logarithmic pair, and let L be a nef line bundle on X. If for any subvariety V of X, not included in D, we have $c_1(L)^{\dim V}\cdot V > 0$, then L is ample modulo D.*

Note that Nakamaye's result implies that under the hypotheses of Proposition 2.6.1, we have $D \subset \mathbb{B}^+(L)$. Then, it is also a consequence of [BCL14] that L is ample modulo D.

Now, consider an étale cover of a ball quotient $X \longrightarrow X'$, ramifying at orders larger than 7 on the boundary. Let $\overline{V} \subset \overline{X}$ be an immersed subvariety, not included in D. Let $q : \mathbb{P}(T_{\overline{V}}) \longrightarrow V$ be the natural projection. There is a well defined immersion $\mathbb{P}(T_{\overline{V}}) \xrightarrow{f} \mathbb{P}(T_{\overline{X}})$, and $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{X}})}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}(1)$ is nef because of Theorem 2.1.6.

It follows from the discussion of Section 2.3.3 that $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{X}})}(1)$ admits a singular metric $\widehat{h}$ with positive curvature, and such that $-\log \widehat{h}$ is bounded from above near the boundary. Pulling back to $\mathbb{P}(T_V)$, we see that the same holds for $f^*\widehat{h}$. In particular, the metric $f^*\widehat{h}$ has positive curvature in the sense of currents, and the absolutely continuous part of this current is given by the curvature on the open part of $\overline{V}$.

Let $\overline{W} \subset \mathbb{P}(T_{\overline{V}})$ be a subvariety which is not included in $q^{-1}(D)$, and call $W = \overline{W} \cap f^{-1}(\mathbb{P}(T_X))$ its open part. We can apply Theorem 0.4.1 to the metric $f^*\widetilde{h}$, to get

$$c_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}(1)^{\dim W} \cdot \overline{W} = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_V)}(1)|_W) \geq \int_W \left(\frac{i}{2\pi} \Theta(f^*\widetilde{h})^{\dim W} \right) > 0,$$

where we used the fact that $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}$ is nef to obtain the first equality. Thus, applying Proposition 2.6.1, we immediately obtain Corollary 2.1.7.

2.6.1 Volume and numerical intersection numbers

In this last section, we present some computations of lower bounds on the volume of $\Omega_{\overline{X}}$, under the hypotheses of Theorem 2.1.6. Let $X \longrightarrow X'$ an étale cover of a ball quotient, such that $\overline{X} \longrightarrow \overline{X'}$ ramifies at order at least 7 on any boundary component. If $\overline{V}$ is a smooth compact manifold of dimension $p \leq n$, and if we have a (non-necessarily injective) immersion $f : \overline{V} \longrightarrow \overline{X}$, with $f(\overline{V}) \not\subset D$, then there is an induced holomorphic map $\mathbb{P}(T_{\overline{V}}) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathbb{P}(T_{\overline{X}})$. By Theorem 2.1.6, the line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}(1) = \widetilde{f}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{X}})}(1)$ is nef, so

$$\mathrm{vol}(\Omega_{\overline{V}}) = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}(1)) = c_1 \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{\overline{V}})}(1) \right)^{2p-1}.$$

We will now explain how we can compute lower bounds for these numbers. The essential technical part of the computations is very close to [Div16].

Let $\overline{W}$ be a smooth manifold of dimension p, and let $q_{\overline{W}} : \mathbb{P}(T_{\overline{W}}) \longrightarrow \overline{W}$ be its projectivized tangent space. Suppose we have an immersion $f : \overline{W} \longrightarrow \overline{X}$ (which we do not assume to be injective), such that $f(\overline{W}) \not\subset D$. Let $W = f^{-1}(X)$ be the open part of $\overline{W}$.

The immersion f induces a well defined morphism $\mathbb{P}(T_{\overline{W}}) \xrightarrow{\widetilde{f}} \overline{Y}_0$. Let $\overline{W_1} \xrightarrow{q} \mathbb{P}(T_{\overline{W}})$ be the blowing-up of $\mathbb{P}(T_{\overline{W}})$ with respect to $\widetilde{f}^{-1}(Z_0)$. All these manifolds take place in the following fibre square :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W_1} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "q"] & \widetilde{Y} \arrow[d, "\pi_0"] \\
\mathbb{P}(T_{\overline{W}}) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

Then, we have the following equalities of intersection numbers on $\mathbb{P}(T_{\overline{W}})$:

$$\begin{aligned}\left[c_1\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(T_{\overline{W}})}\right]^{2p-1} &= \left[\widetilde{f}^* c_1\mathcal{O}(1)_0\right]^{2p-1} \\ &= \left[q^*\widetilde{f}^*\, c_1\mathcal{O}(1)_0\right]^{2p-1} \\ &= \left[\widetilde{g}^*\pi_0^*\, c_1\mathcal{O}(1)_0\right]^{2p-1} \\ &= \left[\widetilde{g}^*\left(\pi^*\, c_1\mathcal{O}(1)_{\log} - E\right)\right]^{2p-1}\end{aligned}$$

where the last equality comes from Proposition 2.4.3. Since $\pi^*\mathcal{O}(1)_{\log}|_E \simeq \mathcal{O}_E$, we finally obtain

$$\left[c_1\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}(T_{\overline{W}})}\right]^{2p-1} = \left[\widetilde{g}^*\ \pi^* c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right]^{2p-1} + (-E)^{2p-1}\cdot\overline{W_1}. \tag{2.19}$$

The line bundle $\mathcal{O}(1)_{\log}$ is nef on $\overline{Y}$ by Theorem 2.1.5, so $\widetilde{g}^*\ \pi^*\mathcal{O}(1)_{\log}$ is nef on $\widetilde{Y}$, and

$$\left[\widetilde{g}^*\ \pi^* c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right]^{2p-1} = \mathrm{vol}\left(\widetilde{g}^*\ \pi^*\mathcal{O}(1)_{\log}\right).$$

Consequently, Proposition 2.2.2 gives the inequality

$$\left[\widetilde{g}^*\ \pi^* c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right]^{2p-1} \geq \int_{W_1}\left[\widetilde{g}^*\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right)^{2p-1}\right],$$

where we denoted by W_1 the open part $q^{-1}(\mathbb{P}(T_W)) \subset \overline{W_1}$.

Since blowing-up along $\widetilde{f}^{-1}(Z_0)$ induces an isomorphism on

$$q_W^{-1}(f^{-1}(X)) = \widetilde{f}^{-1}(Y),$$

this actually means that

$$\left[\widetilde{g}^*\ \pi^* c_1\mathcal{O}(1)_{\log}\right]^{2p-1} \geq \int_{\widetilde{f}^{-1}(Y)}\widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right]^{2p-1} \tag{2.20}$$

Proposition 2.6.2. *The following inequality holds :*

$$\int_{\widetilde{f}^{-1}(Y)}\widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right]^{2p-1} \geq \deg(f)\binom{2p-1}{p}\frac{\left(K_{\overline{X}}+D\right)^p\cdot f(W)}{(n+1)^p}.$$

Proof. We can project the integral we want to compute onto W :

$$I := \int_{\widetilde{f}(Y)}\widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right]^{2p-1} = \int_{f^{-1}(X)}(q_W)_*\widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right]^{2p-1}. \tag{2.21}$$

We will follow the ideas of [Div16] to estimate the integral of $\widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h^*})\right]^{2p-1}$ in terms of the pull-back of the Bergman metric onto W. Take $P \in f^{-1}(X)$, and choose a coordinate neighborhood U of P such that the map $f|_U$ lifts to a map which takes its values in $\mathbb{B}^n$. We will also denote this lift by f. We can assume that the coordinate on U are centered at $P = 0$, and that $f(P) = f(0) = 0$. In addition, up to a linear change of coordinates on U and a unitary change of coordinates on $\mathbb{B}^n$, we can assume that around 0, f is of the form

$$(z_1, \ldots, z_p) \mapsto (z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) + O(|z|^2).$$

The Bergman metric in the usual coordinates $(z_1, \ldots, z_n)$ on $\mathbb{B}^n$ admits the canonical form of (2.4) :

$$h_{Berg} = \frac{\left(1-\|z\|^2\right)\sum_i dz_i\otimes\overline{dz_i} + \left(\sum_i dz_i\right)\otimes\left(\sum_i\overline{dz_i}\right)}{\left(1-\|z\|^2\right)^2}.$$

Thus, at 0, we have $h_{Berg} = I + O(|z|^2)$.

Let us use (1.5) to evaluate the integral of $\widetilde{f}^*\Theta(\widehat{h}^*)$ along the fiber of q_W at P. We get :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}(T_P W)} \widetilde{f}^* \left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)\right]^{2p-1} &= \int_{\mathbb{P}(T_P W)} \left[\frac{i}{2\pi}\Theta\left(\widehat{h|_{T_U}}^*\right)\right]^{2p-1} \\ &= \int_{\mathbb{P}(T_P W)} \left[\frac{1}{\pi}\omega_{h_P}^{FS} - \frac{i}{2\pi}\frac{\langle v\,, \Theta_P(h)v\rangle}{\|v\|_{h_P}^2}\right]^{2p-1} \\ &\geq \binom{2p-1}{p}\int_{\mathbb{P}(T_P W)}\left[\frac{\omega_{h_P}^{FS}}{\pi}\right]^{p-1}\left[-\frac{i}{2\pi}\frac{\langle v\,, \Theta_P(h)v\rangle}{\|v\|_{h_P}^2}\right]^p, \end{aligned} \tag{2.22}$$

where the last inequality holds since all the forms appearing in the Newton binomial are positive. Now, remark that in the coordinates we chose on U, we have

$$-\Theta_P(h) = \left(\sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i\right)\mathrm{I}_n + \left(\sum_i dz_i \otimes e_i^*\right) \wedge \left(\sum_i d\overline{z}_i \otimes e_i\right).$$

Hence, when evaluated on any unitary vector $v \in T_P U$, we obtain

$$-\frac{i}{2}\langle v\,, \Theta_P(h)v\rangle = 2v^* \wedge \overline{v^*} + \omega_{Berg}|_{v^\perp}\,, \tag{2.23}$$

where $v^\perp \subset T_P U$ denotes the subspace of vectors orthogonal to v for h_P. Since all the forms appearing in this equation are positive, we have

$$\left[-\frac{i}{2}\langle v\,, \Theta_P(h)v\rangle\right]^p \geq \left[v^* + \overline{v}^* + \omega|_{v^\perp}\right]^p = \omega_{Berg}^p.$$

This gives

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}(T_P W)} \widetilde{f}^*\left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)\right]^{2p-1} &\geq \binom{2p-1}{p}\left[\frac{\omega_{Berg}}{\pi}\right]^p \int_{\mathbb{P}(T_P W)}\left[\frac{\omega_{h_P}^{FS}}{\pi}\right]^{p-1} \\ &= \binom{2p-1}{p}\left[\frac{\omega_{Berg}}{\pi}\right]^p\end{aligned}$$

Finally, we obtain, integrating on $f^{-1}(X)$:

$$I \geq \binom{2p-1}{p}\int_{f^{-1}(X)}\left[\frac{f^*\omega_{Berg}}{\pi}\right]^p.$$

Proposition 2.3.2 allows us to write

$$I \geq \binom{2p-1}{p}\left[\frac{f^*\left(K_{\overline{X}} + D\right)}{n+1}\right]^p = \deg(f)\binom{2p-1}{p}\frac{\left(K_{\overline{X}} + D\right)^p \cdot f(W)}{(n+1)^p},$$

which concludes the proof. □

Remark. When $p \in \{1, n\}$, we can be more precise in this inequality. Suppose first that $p = 1$.

The equation (2.23) can be replaced with

$$-\frac{i}{2}\langle v, \Theta_P(h)v\rangle = 2v^* \wedge \overline{v^*} = 2\, f^*\omega_{Berg},$$

so, when continuing the computations, we finally find

$$\int_{\widetilde{f}^{-1}(Y)} \widetilde{f}^* \left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)\right] \geq 2\deg(f)\frac{\left(K_{\overline{X}} + D\right)\cdot f(W)}{n+1}.$$

Suppose now that $p = n$. Then (2.22) becomes an equality, and in addition

$$\left[-\frac{i}{2}\langle v\,,\Theta_P(h)v\rangle\right]^n = \left[2v^* + \overline{v}^* + \omega|_{v^\perp}\right]^n = 2\,\omega^p_{Berg}.$$

Thus, finishing the computations gives the equality

$$\int_{\widetilde{f}(Y)} \widetilde{f}^* \left[\frac{i}{2\pi}\Theta(\widehat{h}^*)\right]^n = 2\binom{2n-1}{n}\deg(f)\frac{\left(K_{\overline{X}} + D\right)^n\cdot f(W)}{(n+1)^n}.$$

In particular, we obtain the following inequality of intersection numbers, using the fact that $2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$:

$$c_1\mathcal{O}(1)^{2n-1}_{\log} \geq \binom{2n}{n}\frac{\left(K_{\overline{X}} + D\right)^n}{(n+1)^n}. \tag{2.24}$$

Remark. Using Hirzebruch's proportionality principle in the non-compact case, proved by Mumford [Mum77], we can show that the inequality (2.24) is actually an equality.

We will now compute the term $(-E)^{2p-1}\cdot\overline{W_1}$ appearing in (2.19).

Let E_W be the proper transform of

$$\mathbb{P}\left(T_{\overline{W}}\big|_{f^{-1}(D)}\right) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(f^*T_X|_D\right) = \widetilde{f}^{-1}(p_0^{-1}(D))$$

under the blowing-up q. We have then $E_W = \widetilde{g}^{-1}(E)$, and

$$(-E)^{2p-1}\cdot\overline{W_1} = -\left(E|_E\right)^{2(p-1)}\cdot\left(\overline{W_1}\big|_E\right) = -\left(g^*\;E|_E\right)^{2(p-1)}\cdot E_W.$$

According to Proposition 2.4.6, there is an isomorphism $E \simeq \mathbb{P}\left(T_X|_D\right)$, and $\mathcal{O}_E(-1)$, the tautological line bundle of this projectivized space, is isomorphic to the normal bundle $\mathcal{O}_E(E)$. Moreover, E_W is isomorphic to $\mathbb{P}(T_W|_{W_D})$ as a blowing-up along a smooth divisor, and the morphism $E_W \longrightarrow E$ is given by

$$E_W = \mathbb{P}\left(T_{\overline{W}}\big|_{f^{-1}(D)}\right) \xrightarrow{\widetilde{f}_D} \mathbb{P}\left(T_X|_D\right) \simeq E,$$

where $\widetilde{f}_D = \widetilde{f}\big|_{\widetilde{f}^{-1}(p_0^{-1}(D))}$. Thus, we can use the functoriality of tautological bundles under pull-backs to write $\widetilde{f}_D^*\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{O}_{E_W}(1)$, which gives the formula

$$\left(g^*\;E|_E\right)^{2(p-1)}\cdot E_W = \int_{E_W} c_1\left(\widetilde{f}_D^*\mathcal{O}_E(1)\right)^{2(p-1)} = \int_{E_W} c_1\left(\mathcal{O}_{E_W}(1)\right)^{2(p-1)}. \tag{2.25}$$

We will now estimate this last intersection number in terms of $c_1(N_{D/\overline{X}})$. Since D admits a tubular neighborhood in $\overline{X}$, we can write the following isomorphism of vector bundles over D :

$$T_{\overline{X}}\big|_D \simeq T_D \oplus N_{D/\overline{X}} \simeq \mathcal{O}_D^{n-1} \oplus N_{D/\overline{X}}. \tag{2.26}$$

We see that we can choose a metric h_D on $T_{\overline{X}}\big|D$ whose curvature decomposes locally in the following way in the splitting (2.26) :

$$\Theta\left(T_{\overline{X}}\big|_D\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta(N_{D/\overline{X}}) \end{pmatrix}.$$

Thus, according to (1.5), we can write

$$\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{E_W}(1))_{(x,[v])} = -\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})_y \frac{\langle \tau(w), \tau(w)\rangle_{h_D}}{\|w\|^2_{h_D}} + \frac{1}{\pi}\widetilde{f}_D^*\omega^{FS},$$

where $(y,[w]) = \widetilde{f}_D(x,[v])$, and $\tau : T_{\overline{X}}|_D \longrightarrow N_{D/\overline{X}}$ denotes the canonical projection, which by our choice of metric is orthogonal.

Integrating $\left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{E_W}(1))_{(x,[v])}\right)^{2(p-1)}$ over a fibre $E_{W,x}$ of the projection $E_W \longrightarrow f^{-1}(D)$, for some $x \in f^{-1}(D)$, we get

$$\int_{E_{W,x}} c_1\left(\mathcal{O}_{E_W}(1)\right)^{2(p-1)} = \left[-\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})_y\right]^{p-1} \int_{E_{W,x}} \frac{\|\tau(w)\|^2_{h_D}}{\|w\|^2_{h_D}}\left(\frac{\omega^{FS}}{\pi}\right)^{p-1},$$

with $y = f(x)$. However, $N_{D/\overline{X}}$ is negative on D, so the form $-\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})$ is positive. Hence, we get

$$\begin{aligned}\int_{E_{W,x}} c_1\left(\mathcal{O}_{W_0}(1)\right)^{2(p-1)} &\leq \left[-\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})_y\right]^{p-1} \int_{E_{W,x}} \frac{\|w\|^2_{h_D}}{\|w\|^2_{h_D}}\left(\frac{\omega^{FS}}{\pi}\right)^{p-1} \\ &= \left[-\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})_y\right]^{p-1}.\end{aligned}$$

Thus, integrating over $f^{-1}(D)$, we obtain

$$\begin{aligned}(-E)^{2p-1}\cdot\overline{W_1} &\geq -\int_{f^{-1}(D)}\left[-\frac{i}{2\pi}\Theta(N_{D/\overline{X}})\right]^{p-1} \\ &= -\left(-D|_{\overline{W}}\right)^{p-1} = (-D)^p\cdot\overline{W}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Remark. If $\dim\overline{W} = n$, we can simplify the previous computations. Suppose for example that $\overline{W} = \overline{X}$. Then $(-E)^{2p-1}\cdot\overline{W_1}$ is just the maximal intersection of $(-E)$. We have seen that $E \simeq \mathbb{P}(T_{\overline{X}}\big|_D)$ and that $\mathcal{O}_E(E)$ is isomorphic to the tautological line bundle $\mathcal{O}_E(-1)$. Hence,

$$(-E)^{2n-1} = -\left[c_1\mathcal{O}_E(E)|_E\right]^{2(n-1)} = -\left[c_1\mathcal{O}_E(1)\right]^{2(n-1)} = -\int_D s_{n-1}(T_{\overline{X}}\big|_D).$$

Since $T_{\overline{X}}|_D \simeq \mathcal{O}_D^{n-1}\oplus N_{D/\overline{X}}$, we find $s_{n-1}(T_{\overline{X}}\big|_D) = (-1)^{n-1}c_1(N_{D/\overline{X}})^{n-1}$. This means that

$$(-E)^{2n-1} = -\int_D (-1)^{n-1}c_1(N_{D/\overline{X}})^{n-1} = (-D)^n.$$

In this case, we actually find an equality in (2.27).

Putting everything together, we have proved the following result :

Proposition 2.6.3. *Let $W \xrightarrow{f} \overline{X}$ be an immersion of a smooth manifold $\overline{W}$ of dimension p, not necessarily injective, such that $f(\overline{W}) \not\subset D$. Then if $\mathcal{O}_{\overline{W}}(1)$ is the tautological bundle of $\mathbb{P}(T_{\overline{W}})$, we have the following inequality :*

$$c_1\mathcal{O}_{\overline{W}}(1)^{2p-1} \geq \left[\binom{2p-1}{p}\frac{1}{(n+1)^p}(K_{\overline{X}}+D)^p + (-D)^p\right]\cdot f_*\left[\overline{W}\right], \tag{2.28}$$

where $f_*\left[\overline{W}\right] = \deg(f)\cdot f(\overline{W})$ denotes the image cycle of $\overline{W}$. If $p = 1$, we have the more precise inequality

$$\deg K_{\overline{W}} = c_1\mathcal{O}_{\overline{W}}(1) \geq \left[\frac{2}{n+1}(K_{\overline{X}}+D) - D\right]\cdot f_*\left[\overline{W}\right], \tag{2.29}$$

and if $p = n$, we have the equality (via [Mum77])

$$c_1\mathcal{O}_{\overline{W}}(1)^{2n-1} = \left[\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)^n}(K_{\overline{X}}+D)^n + (-D)^n\right]\cdot f_*\left[\overline{W}\right]. \tag{2.30}$$

2.7 Compactifications of singular quotients of bounded symmetric domains

In this section, we present a joint work with E. Rousseau and B. Taji, included in [CRT17], about the hyperbolicity of compactifications of singular quotients of bounded symmetric domains.

We begin by recalling some basic facts regarding cyclic quotient singularities.

2.7.1 Resolutions of cyclic quotient singularities

Let G be a finite cyclic group with a fixed generator acting on a complex affine n-space $\mathbb{C}^n$ by the formula :

$$g \cdot (z_1, .., z_n) = (e_1 z_1, ..., e_n z_n)$$

where, for each i, e_i is a m^{th}-root of the unity, with $m > 1$. Then the quotient $X = {}_G\backslash^{\mathbb{C}^n}$ has the structure of a normal affine algebraic variety whose singular locus is reduced to the single point $p = q(0)$, where $q : \mathbb{C}^m \to X$ denotes the canonical projection.

In [Fuj75, Theorem 1 p. 303], Fujiki gives a way of constructing a resolution of the singularity of X ; this is actually a particular example of toric resolution. This gives a pair $(\widetilde{X}, \pi)$ consisting of a smooth variety $\widetilde{X}$, a proper birational morphism $\pi : \widetilde{X} \to X$, isomorphic outside $\pi^{-1}(p)$, with the following additional properties :

1. $E = \pi^{-1}(p)$ is a simple normal crossing hypersurface, each component of which being rational.
2. There exists an affine open covering $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_l)$ of $\widetilde{X}$ with $U_i \simeq \mathbb{C}^n$.
3. $\pi^{-1}(p) \cap U_i$ is defined by $u^i_{k_1} ... u^i_{k_t} = 0$ in $U_i \simeq \mathbb{C}^n(u^i)$ for some $k_1, .., k_t$ (depending on i) if it is non empty.
4. For each i the multivalued map $q^{-1} \circ \pi : \mathbb{C}^n(u^i) \to \mathbb{C}^n(z)$ takes the following form :

$$z_k = \prod_{l=1}^{n} {u_l^i}^{b_{lk}} \tag{2.31}$$

   where b_{lk} are non-negative rational numbers (depending on i and strictly less than 1).

Remark. Remark that ${z_k}^m$ descends to X therefore all denominators of the rational numbers b_{lk} must divide m.

2.7.2 Discrepancies

Now, we describe some basic estimates on discrepancies associated to cyclic quotient singularities.

Lemma 2.7.1. *Let G be a cyclic group of cardinal m, acting as before on $\mathbb{C}^n$, and let $X = {}_G\backslash^{\mathbb{C}^n}$. Let $K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i$, where the a_i are the discrepancies. Then, for any i, we have $a_i \leq n(1 - \frac{1}{m}) - 1$.*

Proof. On each open chart U_j, we have, for any $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\pi^*(dz_k) = \sum_l \left[\prod_{s \neq l} (u^j_s)^{b_{sk}} \right] (u^j_l)^{b_{lk} - 1} du^j_l. \tag{2.32}$$

Consequently, $\pi^*(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n)$ can be written as $P(u^j_1, ..., u^j_k)\, du^j_1 \wedge ... \wedge du^j_l$ for some Laurent polynomial P in $(u^j_1)^{\frac{1}{m}}$, ..., $(u^j_k)^{\frac{1}{m}}$. Since for each s, we have $b_{sj} \leq 1 - \frac{1}{m}$, we see from (2.32) that in each monomial of P, each u^j_i appears with degree at most $n(1 - \frac{1}{m}) - 1$.

Consequently, the pluricanonical form $\pi^*(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n)^{\otimes m}$ vanishes at an order at most equal to $m \left[n(1 - \frac{1}{m}) - 1 \right]$ along E_i, if we see it as a local section of $K_{\widetilde{X}}^{\otimes m}$. This means exactly that $a_i \leq n(1 - \frac{1}{m}) - 1$. □

2.7.3 Singular metrics

We will now consider a quotient $X = \Gamma \backslash \Omega$ of a bounded symmetric domain of dimension n by an arithmetic lattice such that

1. X has only cyclic quotient singularities $p_1, ..., p_r$, with isotropy groups G_i such that $|G_i| = m_i$;
2. Γ has only unipotent parabolic elements, so that X admits a toroidal compactification $\overline{X} = X \sqcup D$, where $D \subset \overline{X}$ is a divisor with simple normal crossings.

Denote by $p : \Omega \longrightarrow X$ the canonical projection. Let $\widetilde{X} \overset{\pi}{\longrightarrow} \overline{X}$ be a resolution with exceptional divisor E_i above each p_i. Let $\widetilde{\Delta} = \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) E_i$, $E = \sum_i E_i$ and finally let $\widetilde{D} = \pi^* D$.

We will also denote by h_{Berg} the Bergman metric on the regular part $X \smallsetminus \{p_1, ..., p_r\}$, which we normalize so that $\mathrm{Ric}(h_{\mathrm{Berg}}) = -\omega_{\mathrm{Berg}}$. We let $\eta \in \mathbb{Q}^*$ be such that the holomorphic sectional curvature is bounded from above by $-\eta$. The Bergman metric induces a natural singular metric $\widetilde{h}$ on $\widetilde{X} \smallsetminus (D \cup E_1 \cup ... \cup E_r)$.

We will use the notations of section 2.7.1, concerning resolutions of cyclic singularities.

We first state a lemma which will allow us to control the singularities of $\widetilde{h}$ near the exceptional divisors.

Lemma 2.7.2. *For each bounded open subset $\mathcal{U}$ included in one of the open charts U^i_j, there is a constant $C > 0$ such that, for each tangent vector field v on $\mathcal{U}$,*

$$\|v\|^2_{\widetilde{h}} \leq C \max_j \left|u^i_j\right|^{2\left(\frac{1}{m_i} - 1\right)}. \tag{2.33}$$

Proof. It suffices to give a similar bound in the case $v = \frac{\partial}{\partial u^i_j}$, for any j. Because of (2.31), we have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i_j} &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial z_l}{\partial u^i_j} \frac{\partial}{\partial z_l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left[\mathbb{1}_{\{b_{ij} \neq 0\}} (u^i_j)^{b_{ij}-1} \prod_{s \neq j} (u^i_s)^{b_{is}} \right] \frac{\partial}{\partial z_l}.
\end{aligned}$$

But $b_{ij} - 1 \geq \frac{1}{m_i} - 1$ when $b_{ij} \neq 0$, so we get, after taking the norm

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u^i_j} \right\|_{\widetilde{h}} \leq C \left|u^i_j\right|^{\frac{1}{m_i} - 1} \max_l \left\| \frac{\partial}{\partial z_l} \right\|_{h_{\mathrm{Berg}}}.$$

since the coordinates u^i_j are bounded on $\mathcal{U}$. Finally, the $\left\|\frac{\partial}{\partial z_l}\right\|_{h_{\mathrm{Berg}}}$ are bounded, so we get the result. $\square$

In the next lemma, we explain how to extend the metric on $\widetilde{X}$ using sections of an appropriate adjoint line bundle.

Lemma 2.7.3. *Let $-B \leq 0$ be an upper bound for the bisectional curvature of the Bergman metric on Ω. Assume that the line bundle*

$$L = \pi^* \left(K_{\overline{X}} + D\right) - \frac{1}{A} \left[\widetilde{D} + \widetilde{\Delta}\right]$$

is big on $\widetilde{X}$ for some constant $A > 0$. Then for any $x \in \widetilde{X} \smallsetminus \left(\mathbb{B}^+(L) \cup \widetilde{D} \cup E\right)$, there exists a singular hermitian metric $\widetilde{h}$ on $T_{\widetilde{X}}$, such that

1. *$\widetilde{h}$ is smooth and non-degenerate near x ;*
2. *$\widetilde{h}$ has bisectional curvature bounded from above by $-B + A$, and holomorphic sectional curvature bounded from above by $-\eta + A$;*
3. *$\widetilde{h}$ is locally bounded everywhere on $\widetilde{X}$.*

Proof. Since bigness is an open property, and because $x \notin \mathbb{B}^+(L)$, there exists rational numbers $\beta_i > 1 - \frac{1}{m_i}$ and $\lambda > 1$ such that $L' = \pi^* \left(K_{\overline{X}} + D \right) - \frac{1}{A} \left[\lambda \widetilde{D} + \sum_i \beta_i E_i \right]$ is big, and $x \notin \mathrm{Bs}(L')$. Consequently, we can find $m \in \mathbb{N}$, and $s \in H^0(\widetilde{X}, L'^{\otimes m})$, with $s(x) \neq 0$.

Consider the metric $\widetilde{h} = \|s\|^{\frac{2A}{m}}_{\pi^*\left(\det h^*_{\mathrm{Berg}}\right)^{\otimes m}} h_{\mathrm{Berg}}$. We will show that it has the required properties. First of all, the metric $\det h^*_{\mathrm{Berg}}$ has at most logarithmic growth near $\widetilde{D}$ if we see it as a metric on $\pi^*(K_{\overline{X}} + D)$ (see [Mum77]). Consequently, $\|s\|^{\frac{2A}{m}}_{\pi^*\left(\det h^*_{\mathrm{Berg}}\right)}$ vanishes on $\widetilde{D}$ at any order strictly smaller than $\frac{2A}{m} \cdot \frac{m\lambda}{A} = 2\lambda$. Since $\lambda > 1$, and since h_{Berg}, seen as a metric on $T_{\widetilde{X}}$, has Poincaré growth near $\widetilde{D}$ by Proposition 1.2.3, this proves that $\widetilde{h}$ is locally bounded near $\widetilde{D}$.

Consider now a boundary component E_i, and let v be a local holomorphic vector field, defined in a neighborhood of a point of E_i. By (2.33), $\|v\|^2_{h_{\mathrm{Berg}}}$ diverges at order at most $2\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$ on E_i. Besides, $\|s\|^{\frac{2A}{m}}_{\det h^*_{\mathrm{Berg}}}$ vanishes at order $\frac{2A}{m} \cdot \frac{m\beta_i}{A} = 2\beta_i > 2\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$ on E_i. Consequently, $\|v\|^2_{\widetilde{h}}$ is locally bounded near E_i. This finishes to show that the metric $\widetilde{h}$ is bounded everywhere on $\widetilde{X}$.

Finally, we compute the curvature of $\widetilde{h}$ at the points where it is smooth. Because of our normalization assumptions, we find

$$\begin{aligned} i\Theta(\widehat{h}) &= i\frac{A}{m}\Theta\left(\det h^*_{\mathrm{Berg}}{}^{\otimes m}\right) \otimes \mathbb{I} + i\Theta(h_{\mathrm{Berg}}) \\ &= -A\pi^*\mathrm{Ric}(h_{\mathrm{Berg}}) \otimes \mathbb{I} + i\Theta(h_{\mathrm{Berg}}) \\ &= A\pi^*\omega_{h_{\mathrm{Berg}}} \otimes \mathbb{I} + i\Theta(h_{\mathrm{Berg}}). \end{aligned}$$

and the required bounds on the curvatures are then given by an simple computation. □

2.7.4 Criteria for complex hyperbolicity

We first present a criterion for Brody hyperbolicity modulo an exceptional locus, valid for a singular quotient of any bounded symmetric domain.

Theorem 2.7.4. *Consider the $\mathbb{Q}$-line bundle*

$$L = \pi^* K_{\overline{X}} + \widetilde{D} - \frac{1}{\eta}\left(\widetilde{D} + \widetilde{\Delta}\right).$$

Then $\mathrm{Exc}(\widetilde{X}) \subset \mathbb{B}^+(L) \cup \widetilde{D} \cup E$*, where* $\mathbb{B}^+(L)$ *denotes the augmented base locus. In particular if L is big then* $\mathrm{Exc}(\widetilde{X}) \neq \widetilde{X}$.

Proof. By contradiction, assume there exists an entire curve $\mathbb{C} \xrightarrow{j} \widetilde{X}$ not included in $\mathbb{B}^+(L) \cup \widetilde{D} \cup E$. By our hypothesis, and since bigness is an open condition, we can pick $A < \eta$ in Lemma 2.7.3. This implies that there exists a singular metric $\widetilde{h}$ on $T_{\widetilde{X}}$, non-degenerate on $j(\mathbb{C})$, locally bounded everywhere, and with holomorphic sectional curvature bounded from above by $-\eta + A < 0$.

Thus, $j^*\widetilde{h}$ defines a smooth metric on $\mathbb{C}$ outside a discrete set of points. This metric has negative curvature, bounded away from zero, and is locally bounded everywhere. We can apply the usual extension theorem for plurisubharmonic functions, to obtain a singular metric on $\mathbb{C}$, with negative curvature in the sense of currents, bounded away from zero. This is absurd by the Ahlfors-Schwarz lemma 1.2.1. □

In the case of the ball, we can state the following criterion for the algebraic version of hyperbolicity of the previous compactifications.

Theorem 2.7.5. *Let $\Omega = \mathbb{B}^n$ be the unit ball. Then if the $\mathbb{Q}$-line bundle*

$$L = \pi^* K_{\overline{X}} + \widetilde{D} - (n+1)\left[\widetilde{\Delta} + \widetilde{D}\right]$$

is big, any subvariety $V \subset \widetilde{X}$ such that $V \not\subset \mathbb{B}^{+}(L) \cup \widetilde{D} \cup E$ is of general type. More precisely, any resolution of singularities $\widetilde{V}$ of such a variety has big cotangent bundle.

Proof. Let $V \longrightarrow \widetilde{X}$, with $V \not\subset \mathbb{B}^{+}(L) \cup D \cup E$, and let $\widetilde{V}$ be a resolution of the singularities of V. Then the induced holomorphic map $\widetilde{V} \xrightarrow{j} \widetilde{X}$ is generically immersive.

In Lemma 2.7.3, we can take $B = \frac{1}{n+1}$, $\eta = \frac{2}{n+1}$. Then, choosing any positive constant $A < \frac{1}{n+1}$ will give a metric $\widetilde{h}$ such that $j^{*}\widetilde{h}$ is locally bounded everywhere on $T_{\widetilde{V}}$, has negative bisectional curvature and negative holomorphic sectional curvature, and is bounded from above by $-\frac{1}{n+1}$. By Theorem 2.1.1, this implies that $\Omega_{\widetilde{V}}$ is big. □

Remark. Because of Lemma 2.7.1, the line bundle $\pi^{*}K_{\overline{X}} - K_{\widetilde{X}} + (n\widetilde{D} - E)$ is always effective. Consequently, Theorem 2.7.4 (resp. Theorem 2.7.5) can be restated with $L = K_{\overline{X}} + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\widetilde{D} + \left(E - (n + \frac{1}{\eta})\widetilde{\Delta}\right)$ (resp. $L = K_{\widetilde{X}} - n\widetilde{D} + \left(E - (2n+1)\widetilde{\Delta}\right)$).

Chapitre 3

Différentielles de jets sur les compactifications toroïdales minimales de quotients de la boule

3.1 Introduction

3.1.1 Rappels sur les espaces de jets de Green-Griffiths

Ce chapitre est basé sur l'article [Cad17]. Avant d'en introduire les principaux résultats, rappelons quelques faits importants concernant les différentielles de jets de Green-Griffiths. On pourra trouver une présentation détaillée de ces notions dans [Dem12].

Définition 3.1.1. Soit X une variété complexe lisse, et soit $k \geq 1$ un entier. Le *fibré des k-jets de Green-Griffiths* est la variété

$$J_k^{GG}(X) = \{\text{germes d'applications holomorphes } f : \Delta \longrightarrow X\} \big/ \sim_k ,$$

où $f \sim_k g$ si et seulement si $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ pour tout $j \leq k$, c'est-à-dire si f et g ont le même développement de Taylor à l'ordre k.

On munit naturellement $J_k^{GG}(X)$ d'une structure de variété complexe, ce qui en fait un fibré en $\mathbb{C}^{nk}$-espaces vectoriels au moyen de la projection $[f] \in J_k^{GG} \longmapsto f(0) \in X$. Remarquons toutefois que ce fibré *n'est pas* un fibré vectoriel complexe. En effet, la relation entre deux développements de Taylor d'une application $f : \Delta \longrightarrow X$ n'est pas $\mathcal{O}_X$-linéaire lorsqu'on procède à un changement de cartes sur X. Un élément de $J_k^{GG}(X)$ sera simplement appelé un *k-jet* sur X.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit naturellement sur $J_k^{GG}(X)$ par reparamétrisation : $\lambda \cdot [f] = [t \longrightarrow f(\lambda t)]$. Cette action de groupe préserve les fibres de la projection $J_k^{GG}(X) \longrightarrow X$, et après passage au quotient, on obtient une variété X_k^{GG}, muni d'une projection vers X dont les fibres sont des espaces projectifs à poids $\mathbb{P}(\underbrace{1, ..., 1}_{n \text{ fois}}, 2, ..., 2, ..., \underbrace{k, ..., k}_{n \text{ fois}})$, c'est-à-dire des quotients de $\mathbb{C}^{nk}$ pour l'action de $\mathbb{C}^*$ suivante :

$$\lambda \cdot (z_{1,1}, ..., z_{1,n}, ..., z_{k,1}, ..., z_{k,n}) = \left(\lambda z_{1,1}, ..., \lambda z_{1,n}, \lambda^2 z_{2,1}, ..., \lambda^2 z_{2,n}, ..., \lambda^k z_{k,1}, ..., \lambda^k z_{k,n}\right). \tag{3.1}$$

Les variétés X_k^{GG} peuvent en fait se voir comme les projectivisés des algèbres des différentielles de jets de Green-Griffiths sur X. Ces algèbres se définissent de la façon suivante. Soient k, m des entiers supérieurs à 1. Le *fibré des différentielles de jets de Green-Griffiths d'ordre k et de degré m* est le fibré vectoriel $E_{k,m}^{GG}\Omega_X$ dont les sections sur une carte locale U se décrivent comme suit. Soit $(z_1, ..., z_n)$ des coordonnées sur U, et soit $P \in \Gamma(U, E_{k,m}^{GG}\Omega_X)$. Alors P peut se voir comme une équation différentielle holomorphe, associant à tout k-jet $[f]$ sur U la valeur

$$P(f) = \sum_i a_l(f(0))\,(f_1')^{m_{l,1,1}}...(f_n')^{m_{l,1,n}}...(f_1^{(k)})^{m_{l,k,1}}...(f_n^{(k)})^{m_{l,k,n}},$$

où les a_l sont des fonctions holomorphes sur U, et les $m_{l,i,j}$ sont des entiers, pris tels que la condition $P(\lambda \cdot [f]) = \lambda^m P([f])$ soit satisfaite.

On vérifie sans peine que ces définitions locales se recollent pour définir un fibré vectoriel sur X. L'*algèbre des différentielles de jets de Green-Griffiths d'ordre* k est alors le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X = \bigoplus_{m\geq 0} E_{k,m}^{GG}\Omega_X,$$

avec $E_{k,0}^{GG}\Omega_X = \mathcal{O}_X$, et où la loi multiplicative est définie naturellement. Comme annoncé précédemment, ce faisceau d'algèbre permet d'obtenir les variétés X_k^{GG} de la façon suivante :

Proposition 3.1.2. *Pour tout k, on a une identification naturelle*

$$X_k^{GG} \cong \mathbf{Proj}_X\left(E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X\right),$$

où $\mathbf{Proj}_X$ *désigne le foncteur de projectivisation schématique.*

Les propriétés classiques des schémas projectivisés impliquent alors que X_k^{GG} est muni de faisceaux de $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}$-modules tautologiques $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$, tels que

$$E_{k,m}^{GG}\Omega_X = (\pi_k)_* \mathcal{O}_k^{GG}(m)$$

pour tout m, où $\pi_k : X_k^{GG} \longrightarrow X$ est la projection naturelle.

Une des difficultés que présentent les différentielles de jets de Green-Griffiths vient du fait que l'algèbre $E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X$ n'est pas engendrée en degré 1 lorsque $k \geq 2$, ce qui est à rapprocher du fait que les fibres de la projection $X_k^{GG} \longrightarrow X$ sont des espaces projectifs à poids, et du fait que le faisceau $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ n'est pas inversible en général. Par ailleurs, $\mathcal{O}_k^{GG}(1)^{\otimes m}$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ en général.

Pour ces raisons, il parait judicieux de considérer X_k^{GG} comme un *champ de Deligne-Mumford* (dans la catégorie des espaces analytiques complexes), sur lequel on dispose d'un fibré en droites orbifold $\mathcal{O}_k^{GG,orb}(1)$. Les faisceaux $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ peuvent alors se voir comme la projection sur l'espace de modules grossiers de X_k^{GG} des fibrés inversibles orbifolds $\mathcal{O}_k^{GG,orb}(m)$. Dans toute la suite, on verra toujours X_k^{GG} comme un champ de Deligne-Mumford, et l'on ne travaillera plus qu'avec les objets orbifolds. On utilisera alors la notation $\mathcal{O}_k^{GG}(1)$ pour désigner le fibré en droites *orbifold* précédent, sans risque de confusion.

Remarquons enfin que le fibré en droites orbifold $\mathcal{O}_k^{GG}(m)$ est un « vrai » fibré en droites (c'est-à-dire, est le tiré en arrière d'un fibré en droites sur l'espaces de modules grossiers de X_k^{GG}) si m est divisible par tous les poids $1, ..., k$ intervenant dans la définition des espaces projectifs à poids par l'action (3.1). C'est bien sûr le cas si et seulement si $\mathrm{ppcm}(1, ..., k)|m$.

Localement sur X, les sections de $E_{k,m}^{GG}\Omega_X$ peuvent s'écrire comme des polynômes Q en les composantes de $f', ..., f^{(k)}$ tels que $Q(t \mapsto f(\lambda t)) = \lambda^m Q(t)$. On vérifie que cette dernière condition est satisfaite si et seulement Q peut se décomposer en composantes multiholomogènes en $f', ..., f^{(k)}$ de degrés $l_1, l_2, ..., l_k$, avec

$$l_1 + 2l_2 + ... + k\,l_k = m.$$

Si $\underline{l} = (l_1, ..., l_k)$ est un certain k-multi-indice, on note, pour tout $p \leq k$, $|\underline{l}|_p = l_1 + 2l_2 + ... + p\,l_p$. On vérifie alors que la filtration $F_{k-1}^{\bullet}E_{k,m}^{GG}\Omega_X$ définie localement par

$$F_{k-1}^{p}E_{k,m}^{GG}\Omega_X(U) = \left\{Q \in E_{k,m}^{GG}\Omega_X(U) \text{ ne faisant intervenir que des monômes } (f)^{\underline{l}} \text{ avec } |\underline{l}|_{k-1} \geq p\right\}.$$

est bien définie globalement. Il s'agit en fait de vérifier qu'elle est compatible avec les changements de cartes, ce qui se voit facilement à partir des formules de changements de coordonnées pour les développements de Taylor des dérivées $f', ..., f^{(k)}$. Ces formules permettent aussi d'obtenir l'isomorphisme suivant pour le gradué de la filtration $F^{\bullet}_{k-1}$

$$\mathrm{Gr}^{\bullet}_{F_{k-1}} E^{GG}_{k,m}\Omega_X \cong \bigoplus_{m_1+kl_k=m} E^{GG}_{k-1,m_1}\Omega_X \otimes \mathrm{Sym}^{l_k}\Omega_X. \tag{3.2}$$

En raffinant inductivement la filtration $F^{\bullet}_{k-1}$, au moyen de la filtration sur $E^{GG}_{k-1,m_1}\Omega_X$, on voit que l'on obtient une filtration $F^{\bullet}E^{GG}_{k,m}\Omega_X$, indexée par $\mathbb{N}^k$, dont les termes gradués non nuls s'écrivent

$$\mathrm{Gr}^{\underline{l}}_F\, E_{k,m}\Omega_X \cong \mathrm{Sym}^{l_1}\Omega_X \otimes ... \otimes \mathrm{Sym}^{l_k}\Omega_X. \tag{3.3}$$

, si $\underline{l} = (l_1, ..., l_k) \in \mathbb{N}^k$, avec $l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m$.

Remarquons que cette filtration est compatible avec la loi multiplicative du faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$. Cette filtration sera essentielle par la suite pour construire une déformation des espaces X^{GG}_k en des fibrés projectifs à poids.

3.1.2 Résultats

Le résultat principal de ce chapitre est une estimée combinatoire sur le volume des fibrés de différentielles de jets de Green-Griffiths sur une compactification toroïdale minimale d'un quotient de la boule. Si X est une variété complexe projective lisse, et si $k \in \mathbb{N}^*$, ce volume sera défini comme le volume de $\mathcal{O}^{GG}_k(1)$ vu comme $\mathbb{Q}$-fibré en droites, que l'on peut aussi calculer de la façon suivante :

$$\mathrm{vol}(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X) = \limsup_{\substack{m\longrightarrow+\infty \\ \mathrm{ppcm}(1,...,k)|m}} \frac{h^0\left(X, E^{GG}_{k,m}\Omega_X\right)}{m^{n+nk-1}/(n+nk-1)!}.$$

Avec cette notation, on a alors le théorème suivant.

Théorème 3.1.3 ([Cad17])**.** *Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale minimale lisse d'un quotient de $\mathbb{B}^n$ par un réseau Γ sans torsion dont tous les éléments paraboliques sont supposés unipotents. On a alors la borne inférieure suivante sur le volume de $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$, valable pour tout k :*

$$\mathrm{vol}\left(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}\right) \geq \frac{1}{(k!)^n}\left[\frac{(K_{\overline{X}}+D)^n}{(n+1)^n}\left(\sum_{\{u_1\leq...\leq u_n\}\subset S_{k,n}} \frac{1}{u_1...u_n}\right) + (-D)^n \sum_{1\leq i_1\leq...\leq i_n\leq k} \frac{1}{i_1...i_n}\right] \tag{3.4}$$

où $S_{k,n} = \{1_1 < ...1_{n+1} < 2_1 < ... < 2_{n+1} < ... < k_1 < ... < k_{n+1}\}$. Dans cette formule, on calcule les fractions $\frac{1}{u_1...u_n}$ en oubliant les indices des éléments de $S_{k,n}$.

Pour démontrer ce théorème, on montre que sur une variété complexe donnée, on peut construire une déformation des espaces de jets de Green-Griffiths en un fibré projectivisé à poids de sommes directes du fibré tangent. Ceci précise une construction présentée par Demailly dans [Dem11].

Le résultat précédent permet d'obtenir la version effective suivante d'un théorème de Demailly [Dem11], dans le cas des compactifications toroïdales minimales de quotients de la boule.

Théorème 3.1.4 ([Cad17])**.** *Soit $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}^n}$ une compactification toroïdale minimale lisse. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, sous l'une des hypothèses suivantes,*

1. *$n \in [\![4, 5]\!]$ et $k > e^{-\gamma}e^{-(-D)^n(n-2)n!+1}$;*
2. *$n \geq 6$ et $k > e^{-\gamma}e^{\frac{\frac{\pi^2}{6}(n-2)n!+1}{\frac{n+1}{2\pi}-1}}$*

le fibré en droite orbifold $\mathcal{O}^{GG}_{\overline{X}_k}(1)$ *est big. Dans les équations précédentes,* γ *représente la constante d'Euler-Mascheroni.*

Remarque. Dans la suite, pour alléger l'expression de certaines formules, on emploiera parfois la notation $S^l E$ pour désigner la l-ième puissance symétrique de E, au lieu de la notation $\mathrm{Sym}^l E$ employée jusqu'à présent.

La suite de ce chapitre est issue de l'article [Cad17].

3.2 Segre classes of weighted projective bundles

We recall some results, first proved by Al-Amrani [AA97], permitting to construct Chern classes of weighted projective bundles. While Al-Amrani did his computation in the setting of cohomology with integer coefficients, the presentation is somewhat simplified if we consider instead Chow rings with rational coefficients, which will be sufficient for our purposes. We will follow the exposition of [Ful98] to explain how we can construct these Chern classes.

Definition 3.2.1. Let X be a complex projective variety. Consider a family $(E_i, a_i)_{1 \leq i \leq p}$, where the E_i are vector bundles on X, and the a_i are positive integers. The *weighted projectivized bundle* $\mathbb{P}\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right)$, associated with the datum (E_i, a_i), is the projectivized scheme of the graded $\mathcal{O}_X$-algebra $\mathrm{Sym}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)})^*$, defined as

$$\mathrm{Sym}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)})^* = \mathrm{Sym}\ E_1^{*(a_1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} ... \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{Sym}\ E_p^{*(a_p)},$$

where, for any i, $\mathrm{Sym}\, E_i^{*(a_i)}$ is the graded $\mathcal{O}_X$-algebra generated by sections of $E_i^{*(a_i)}$ in degree a_i. Remark that we use here the geometric convention for projectivized bundles.

We will say, by abuse of language, that $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ is a *weighted direct sum*, or even a *weighted vector bundle*.

Proposition 3.2.2. *The variety* $\mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)})$ *has a natural cyclic orbifold structure (or a structure of smooth cyclic Deligne-Mumford stack, in the complex analytic category), for which the tautological line bundle* $\mathcal{O}(1)$ *is naturally defined as an orbifold line bundle. Moreover, this orbifold line bundle is* locally ample*, in the sense that the local isotropy groups of the orbifold structure act transitively on the fibres of* $\mathcal{O}(1)$ *(see for example [RT11]). Besides, if* $\mathrm{lcm}(a_1, ..., a_p) | m$*, the bundle* $\mathcal{O}(m)$ *can be identified to a standard line bundle on* $\mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{(a_p)})$*, i.e. to the pullback of a line bundle on the coarse moduli space of this Deligne-Mumford stack.*

Proof. We can naturally endow $\mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{(a_p)})$ with a structure of Artin stack $\mathcal{P}$, since it can be considered as a quotient stack

$$E_1 \oplus ... \oplus E_p \big/ \mathbb{C}^*,$$

where $\mathbb{C}^*$ acts by $\lambda \cdot (v_1, ..., v_p) = (\lambda^{a_1} v_1, ..., \lambda^{a_p} v_p)$.

Locally on X, the weighted projectivized bundle can be trivialized as a product of the base with a weighted projectivized space $\mathbb{P}(a_1, ..., a_p)$, where each a_i appears $\mathrm{rk}\ E_i$ times. Such a weighted projective space has a natural structure of an orbifold with cyclic isotropy groups (see [RT11]). Consequently, the Artin stack $\mathcal{P}$ locally has a cyclic orbifold structure, which makes it a smooth cyclic Deligne-Mumford stack. The claims on $\mathcal{O}(1)$ are local, and they can be proved directly using the classical properties of weighted projective spaces (see [Dol82] and [RT11]). □

We now start the study of the Chow groups with rational coefficients of these weighted projectivized bundles.

Proposition 3.2.3. *Let $X = \operatorname{Spec} A$ be an affine scheme over $\mathbb{C}$ and let $\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$ be a weighted projectivized bundle on X. Then, there is an isomorphism between Chow groups with rational coefficients :*

$$A_*\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)_{\mathbb{Q}} \cong A_*\left(\mathbb{P}^r_X\right)_{\mathbb{Q}},$$

where $A_*\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$ denotes the Chow group of the coarse moduli space of $\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$.

Proof. Let $G = \mu_{a_0} \times ... \times \mu_{a_r}$, where, for any $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k denotes the group of k-th roots of unity. The finite group G acts on $\mathbb{P}^r$ by $(\lambda_0, ..., \lambda_r) \cdot [z_0 : ... : z_r] = [\lambda_0 z_0 : ... : \lambda_r a_r]$, and the projectivized bundle $\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$ is identified with the quotient scheme ${\mathbb{P}^r_X}\big/G$. If $\pi : \mathbb{P}^r_X \longrightarrow \mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$ is the canonical projection, there is a natural isomorphism (see [Ful98, Example 1.7.6])

$$\pi^* : A_*\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} A_*\left(\mathbb{P}^r_X\right)^G_{\mathbb{Q}}.$$

Besides, $A_*(\mathbb{P}^r_X)_{\mathbb{Q}}$ is generated as a $\mathbb{Q}$-vector space by the classes $[L_j]$, where, for any $i \in \{1, ..., r\}$, L_j is the subscheme of $\mathbb{P}^r_X$ given by the homogeneous equations $z_j = ... = z_r = 0$. We see immediately that each $[L_j]$ is a fixed point of $A_*\left(\mathbb{P}^r_X\right)_{\mathbb{Q}}$ under G. These gives the result. ☐

Proposition 3.2.4. *Let X be an affine scheme over $\mathbb{C}$ and let $\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r) \xrightarrow{q} X$ be a weighted projectivized bundle over X. Then, for any $k \in \mathbb{N}$, there is an isomorphism*

$$\bigoplus_{j=0}^{r} (A_{k-r+j}X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} A_*\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)_{\mathbb{Q}}, \tag{3.5}$$

given by $(\alpha_j)_j \longmapsto \sum_{j=0}^{r} c_1\mathcal{O}(m)^j \cap q^*(\alpha_j)$, where $m = \operatorname{lcm}(a_0, ..., a_r)$.

Proof. The weighted projective bundle $\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)$ sits in in a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^r_X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{id}"] & X
\end{tikzcd}$$

where π is identified with the projection $\mathbb{P}^r_X \longrightarrow {\mathbb{P}^r_X}\big/G$, with, as before, $G = \mu_{a_0} \times ... \times \mu_{a_r}$.

Taking Chow groups, we obtain the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
A_k\left(\mathbb{P}^r_X\right)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\pi_*"] & A_k\,\mathbb{P}_X(a_0, ..., a_r)_{\mathbb{Q}} \\
\bigoplus_{j=0}^{r} (A_{k-r+j}X)_{\mathbb{Q}} \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \bigoplus_{j=0}^{r} (A_{k-r+j}X)_{\mathbb{Q}}, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

where the vertical left arrow is written $(\alpha_j)_j \longmapsto \sum_{j=0}^{r} c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_X}(m)^j \cap p^*(\alpha_j)$, with a similar expression for the one on the right. The left vertical arrow is an isomorphism by [Ful98], and the horizontal ones are also isomorphisms by Proposition 3.2.3. This gives the result. ☐

Proposition 3.2.5. *Let X be any projective scheme over $\mathbb{C}$, and let $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ be a weighted direct sum over X. Let $p : \mathbb{P}_X\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right) \longrightarrow X$ be the natural projection. For any k, there is an isomorphism*

$$A_k\,\mathbb{P}_X\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right)_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{j=0}^{r} (A_{k-r+j}X)_{\mathbb{Q}}, \tag{3.6}$$

where $r = \sum_{j=1}^{p} \operatorname{rk} E_j - 1$.

Proof. Let $m = \mathrm{lcm}(a_1, ..., a_p)$. We check that the morphism of $\mathbb{Q}$-vector spaces

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=0}^{r} (A_{k-r+j}X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sigma_X} & A_k\left(\mathbb{P}_X\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right)\right)_{\mathbb{Q}} \\ (\alpha_j)_j & \longmapsto & \sum_{j=0}^{r} c_1\mathcal{O}(m)^n \cap q^*\alpha_j \end{array}$$

is an isomorphism. To simplify the notations, if $Z \subset X$ is a subscheme, we will simply write $\mathbb{P}_Z$ to denote $\mathbb{P}_Z\left(E_1|_Z^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r|_Z^{(a_r)}\right)$.

Let $U \subset X$ be an open affine subset over which the vector bundles $E_1, ..., E_r$ are trivial. If $Z = X \setminus U$, we have a commutative diagram with exact lines :

$$\begin{tikzcd} (A_k\mathbb{P}_Z)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & (A_k\mathbb{P}_X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & (A_kU)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & 0 \\ \bigoplus_{j=0}^{n}(A_{k+l-n}Z)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_Z"] & \bigoplus_{j=0}^{n}(A_{k+l-n}X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_X"'] & \bigoplus_{j=0}^{n}(A_{k+l-n}U)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_U"'] & 0 \end{tikzcd}$$

where the left horizontal arrows are given by the push-forward by the embedding $Z \hookrightarrow X$, and the horizontal arrows on the middle are given by the restriction to U. The morphism σ_U is onto by Proposition 3.2.4. Then if σ_Z is onto, so is σ_X. By Noetherian induction, we see that σ_X is onto.

To show that σ_X is injective, we use the following fact :

Lemma 3.2.6. *Let $[V] \in A_kX$. Then $q_*\left(c_1\mathcal{O}(m)^r \cap \pi^*[V]\right) = \left(\prod_j a_j^{\mathrm{rk}E_i}\right) m^r [V]$.*

The lemma proves that σ_X is injective. Indeed, if (α_j) is a non-zero family such that $\sum_{j=0}^{r} c_1\mathcal{O}(m)^j \cap p^*(\alpha_j) = 0$, let l be the largest integer such that $\alpha_l \neq 0$. Then

$$\begin{aligned} p_*\left(c_1\mathcal{O}(m)^{r-l} \cap \sum_{j=0}^{r} c_1\mathcal{O}(m)^j \cap p^*(\alpha_j)\right) &= m^r\left(\prod_j a_j^{\mathrm{rk}E_i}\right)\alpha_l \\ &= 0, \end{aligned}$$

which is absurd. □

Proof of Lemma 3.2.6. By the usual projection formula, applied to the embedding $V \hookrightarrow X$, we can suppose that $X = V$. Then $p_*\left(c_1\mathcal{O}(m)^n \cap \pi^*[X]\right) = c[X]$ for a certain $c \in \mathbb{Q}$. Restricting to an open subset of X, we can assume that the E_i are trivial, and thus that $\mathbb{P}_X(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}) = \mathbb{P}_X(b_0, ..., b_r)$ for a certain r-uple $(b_0, ..., b_s)$. Then

$$\begin{aligned} q_*\left(c_1\mathcal{O}(m)^r \cap [\mathbb{P}_X(b_0, ..., b_r)]\right) &= q_*\pi_*\left(c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)^r \cap \pi^*[\mathbb{P}_X(b_0, ..., b_r)]\right) \\ &= q_*\pi_*\left(c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)^r \cap [\mathbb{P}_X^r]\right) \\ &= |G|\, p_*\left(c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)^r \cap [\mathbb{P}_X^r]\right) \\ &= |G|\, m^r\ [X], \end{aligned}$$

where $G = \mu_{b_0} \times ... \times \mu_{b_r}$. We finally have $|G| = \prod_j b_j = \prod_j a_j^{\mathrm{rk}E_j}$, which gives the result. □

Using the isomorphism (3.6), we can now define the Segre classes associated with a weighted direct sum $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$.

Definition 3.2.7. Let X be a projective algebraic variety of dimension n, and let $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ be a weighted direct sum on X. Let $q : \mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}) \longrightarrow X$ be the natural projection.

If $k \in [\![0, n]\!]$, the k-th Segre class of $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ is defined as the following endomorphism of $(A_* X)_{\mathbb{Q}}$: if $\alpha \in (A_l X)_{\mathbb{Q}}$, let

$$s_k\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right) \cap \alpha = \frac{1}{m^{k+r}} q_* \left(c_1 \mathcal{O}(m)^{r+k} \cap q^* \alpha\right).$$

where $r = \sum_i \mathrm{rk} E_i - 1$, and $m = \mathrm{lcm}(a_1, ..., a_p)$.

Remark. In Definition 3.2.7, we could have replaced m by any integer divisible by $\mathrm{lcm}(a_1, ..., a_p)$. The important fact used here is that $\mathcal{O}(m)$ is a standard line bundle, which allows us to define its first Chern class in the usual way.

We will now explain how to compute the Segre classes $s_j\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right)$ in terms of the $s_\bullet(E_j)$ and of the weights (a_j).

Splitting construction. Exactly as in the case of non-weighted vector bundles, we can use the standard "splitting construction" (see [Ful98, Theorem 3.2]), to construct a flat morphism $p : X' \longrightarrow X$, such that $p^* : A_* X \longrightarrow A_* X'$ is injective, and such that the $p^* E_i$ admit filtrations by vector subbundles, such that each successive quotient is of rank 1. If there is a relation between the weighted Segre classes of the $p^* E_i$ in $(A_* X')_{\mathbb{Q}}$, this relation can be transposed in $(A_* X)_{\mathbb{Q}}$.

Rescaling on the extension classes. By the previous construction, we can assume that the vector bundles E_i admit filtrations by vector subbundles $0 = E_{i,0} \subset E_{i,1} \subset ... \subset E_{i,\mathrm{rk} E_i} = E_i$. As in the case of standard direct sums, we can rescale the extension classes of each graded terms of this filtration, to restrict to the case where the E_i are totally split.

Thus, we will now suppose that there exist line bundles $L_0, ..., L_r$ on X with $r = \sum_j \mathrm{rk}\, E_i - 1$, such that $\mathbb{P}_X(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)})$ is identified to $\mathbb{P}_X(L_0^{(b_0)} \oplus ... \oplus L_r^{(b_r)})$, for some weights $(b_0, ..., b_r)$.

Let $V \subset X$ be a subvariety. We will determine a formula for $s_\bullet(L_0^{(b_0)} \oplus ... \oplus L_r^{(b_r)}) \cap [V]$. Using the projection formula applied to the embedding $V \hookrightarrow X$, we can assume $V = X$.

We will reason by induction on r. Suppose first that $r = 0$. Then $\mathbb{P}(L_0^{(b_0)})$ and $\mathcal{O}(b_0)$ are identified with X and L_0^*, respectively. Then, by definition of $s_\bullet(L_0^{(b_0)})$,

$$\begin{aligned} s_j(L_0^{(b_0)}) \cap [X] &= \frac{1}{b_0^{j+r}} \int_X c_1 \mathcal{O}(b_0)^{j+r} \cap [X] \\ &= \frac{1}{b_0^{j+r}} (-1)^{j+r} c_1(L_0)^{j+r} \cap [X] \\ &= \frac{1}{b_0^j} (-1)^j c_1(L_0)^j \cap [X]. \end{aligned}$$

So,

$$s_\bullet(L_0^{(b_0)}) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \frac{1}{b_0^j} c_1(L_0)^j. \tag{3.7}$$

Assume now that $r \geq 1$. We have the following diagram

$$\begin{tikzcd} P' = \mathbb{P}\left(L_1^{(b_1)} \oplus ... \oplus L_r^{(b_r)}\right) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "p'"'] & \mathbb{P}\left(L_0^{(b_0)} \oplus ... \oplus L_r^{(b_r)}\right) = P \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

As before, let $m = \mathrm{lcm}(b_0, ..., b_s)$. Then, if $l_0 = \frac{m}{b_0}$, we have an injective morphism $(p^* L_0^*)^{\otimes l_0} \hookrightarrow \mathcal{O}_P(m)$, associated with a non-zero section $s \in H^0(P, (p^* L_0)^{\otimes l_0} \otimes \mathcal{O}_P(m))$. The zero divisor of s is supported on P', with some multiplicity that we will now compute.

Lemma 3.2.8. *We have* $[Z(s)] = \frac{m}{\mathrm{lcm}(b_0, \gcd(b_1, \dots, b_r))}[P']$.

Proof. Restricting to an open affine subset of X, we can write $P = \mathrm{Proj}\ A[e_0^*, \dots, e_r^*]$, and $P' = \mathrm{Proj}\ A[e_1^*, \dots, e_r^*]$, where the e_i^* have degree b_i. Then, on $U = D_+(e_0^* \dots e_s^*) \subset P$, the ideal $I(P')$ of the subscheme P' is generated by the monomials $(e_0^*)^{j_0}(e_1^*)^{j_1} \dots (e_r^*)^{j_r}$, where $j_0, \dots, j_r \in \mathbb{Z}$ are such that :

$$j_0 > 0 \text{ and } \sum_{i=0}^{r} b_i j_i = 0.$$

Let k_0 be the smallest integer such that there exists a family $(k_0 = j_0,\ \dots,\ j_s)$ satisfying these conditions. It is easy to see that

$$b_0 k_0 = \mathrm{lcm}(b_0, \gcd(b_1, \dots, b_r)),$$

and that $I(P')$ is generated by an element $(e_0^*)^{k_0}(e_1^*)^{l_1} \dots (e_r^*)^{l_r}$ with $b_0 k_0 + \sum_{j \geq 1} b_j l_j = m$.

The section s can be written in U as

$$s|_U = p^*\left(e_0^{\otimes l_0}\right) \otimes (e_0^{*l_0}) = \frac{(e_0^*)^{l_0}}{(e_1^*)^{l_1}} \qquad \underbrace{p^*(e_0^{\otimes l_0}) \otimes (e_1^*)^{l_1}}_{\text{local frame for } (p^* L_0)^{\otimes l_0} \otimes \mathcal{O}(m)}$$

A local equation for $Z(s)$ on U is then given by $s' = \frac{(e_0^*)^{l_0}}{(e_1^*)^{l_1}}$. If $\Gamma = \mathcal{O}_{P', P}$, the multiplicity of P' in $Z(s)$ is consequently

$$\mathrm{length}_\Gamma\left(\Gamma / s'\Gamma\right) = \mathrm{length}_\Gamma\left(\Gamma \Big/ \left(\frac{(e_0^*)^{l_0}}{(e_1^*)^{l_1}}\right)\Gamma\right) = \frac{l_0}{k_0} = \frac{m}{b_0 k_0} = \frac{m}{\mathrm{lcm}(b_0, \gcd(b_1, \dots, b_r))}.$$

□

Let $\mu = \frac{m}{\mathrm{lcm}(b_0, \gcd(b_1, \dots, b_r))}$. Since s is a global section of $(p^* L_0)^{\otimes l_0} \otimes \mathcal{O}_P(m)$, we have

$$\begin{aligned} \mu[P'] &= [Z(s)] \\ &= \left(c_1\left(p^*\left(L_0^*\right)^{\otimes l_0}\right) + c_1 \mathcal{O}_P(m)\right) \cap [P] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Then by definition, and because of Remark 3.2,

$$\begin{aligned} s_\bullet(L_1^{(b_1)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}) \cap [X] &= p'_*\left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{m^j} c_1 \mathcal{O}_{P'}(m)^j \cap [P']\right) \\ &= p_* i_*\left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{m^j}\, c_1\left(i^* \mathcal{O}_P(m)\right)^j \cap [P']\right) \\ &= p_*\left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{m^j} c_1 \mathcal{O}_P(m)^j \cap i_*[P']\right), \end{aligned}$$

where we applied the projection formula to the morphism i. We can then insert (3.8), to obtain :

$$\begin{aligned}
s_\bullet(L_1^{(b_1)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}) \cap [X] &= p_*\left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{m^j} c_1\mathcal{O}(m)^j \cap \frac{1}{\mu}\left(c_1\left(p^* L_0^{\otimes l_0} + c_1\mathcal{O}(m)\right) \cap [P]\right)\right) \\
&= -\frac{m}{\mu} \underbrace{p_*\left(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{m^j} c_1\mathcal{O}(m)^j\right) \cap \left(1 - \frac{1}{m} c_1\mathcal{O}(m)\right) \cap [P]\right)}_{=p_*[P]=0} \\
&\quad + \frac{m}{\mu} p_*\left(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{m^j} c_1\mathcal{O}(m)^j\right) \cap \left(1 + \frac{1}{m} c_1\left(p^* L_0^{\otimes l_0}\right)\right) \cap [P]\right)
\end{aligned}$$

To get the underlined equality, we simply used Bernoulli's formula $(\sum_{j\geq 0}^{s} x^j) \cdot (1-x) = 1 - x^{s+1}$, applied to the nilpotent element $\frac{1}{m} c_1\mathcal{O}(m)$. Then, since $\frac{l_0}{m} = \frac{1}{b_0}$,

$$\begin{aligned}
s_\bullet(L_1^{(b_0)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}) \cap [X] &= \frac{m}{\mu} p_*\left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{m^j} c_1\mathcal{O}(m)^j \cap p^*\left(\left(1 + \frac{c_1(L_0)}{b_0}\right) \cap [X]\right)\right) \\
&= \frac{m}{\mu} s_\bullet\left(L_0^{(b_0)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}\right) \cap c_\bullet\left(L_0^{*(b_0)}\right) \cap [X],
\end{aligned}$$

where $c_\bullet(L_0^{(b_0)})$ is the formal inverse of the Segre class (3.7). To abbreviate the notations, denote temporarily $a \vee b = \mathrm{lcm}(a,b)$, and $a \wedge b = \gcd(a,b)$.

Since $\mu = \frac{m}{b_0 \vee (b_1 \wedge \dots \wedge b_r)}$, we finally find the following induction formula :

Lemma 3.2.9.

$$s_\bullet\left(L_0^{(b_0)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}\right) = \frac{1}{b_0 \vee (b_1 \wedge \dots \wedge b_r)} s_\bullet(L_0^{(b_0)})\ s_\bullet(L_1^{(b_1)} \oplus \dots \oplus L_r^{(b_r)}). \tag{3.9}$$

Our final formula will come inductively from this lemma, using the following result.

Lemma 3.2.10. *Let $b_0, \dots, b_r$ be positive integers. Then we have the identity*

$$\prod_{j\geq 0} \frac{1}{b_j \vee (b_{j+1} \wedge \dots \wedge b_r)} = \frac{b_0 \wedge \dots \wedge b_r}{b_0 \dots b_r}.$$

Proof. Considering the p-adic valuations of these integers, we see that it suffices to show that for any non-negative integers $n_0, \dots, n_r$, we have

$$\sum_{j\geq 0} \max(n_j, \min(n_{j+1}, \dots, n_r)) = \sum_{j\geq 0} n_j - \min(n_0, \dots, n_r).$$

We see easily that the left hand side is invariant under permutation of two consecutive elements in $(n_0, \dots, n_r)$. We can consequently assume that the r-uple $(n_0, \dots, n_r)$ is non-decreasing. Then

$$\sum_{j\geq 0} \max(n_j, \min(n_{j+1}, \dots, n_r)) = \sum_{j\geq 0} n_{j+1} = \sum_{j\geq 0} n_j - n_0.$$

This gives the result, since $n_0 = \min(n_0, \dots, n_r)$. □

Thus, iterating formula (3.9), we proved the following proposition.

Proposition 3.2.11. *Let $L_0, ..., L_r$ be line bundles on X, endowed with weights $b_0, ..., b_r$. We have*

$$s_\bullet\left(L_0^{(b_0)} \oplus ... \oplus L_r^{(b_r)}\right) = \frac{\gcd(b_0, ..., b_r)}{b_0 \dots b_r} \prod_{0 \le j \le r} s_\bullet\left(L_j^{(b_j)}\right),$$

where for any line bundle L and any weight $a \in \mathbb{N}$, we have $s_\bullet(L^{(a)}) = \sum_{j \ge 0} \frac{s_j(L)}{a^j}$.

Finally, as previously explained, we can use the splitting principle and a rescaling of extension classes, to deduce the following version of Whitney's formula.

Proposition 3.2.12. *Let $E_1, ..., E_p$ be vector bundles of respective ranks $r_1, ..., r_p$, endowed with weights $a_1, ..., a_p$. We have*

$$s_\bullet\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right) = \frac{\gcd(a_1, ..., a_p)}{a_1 \dots a_p} \prod_{1 \le j \le p} s_\bullet\left(E_j^{(a_j)}\right), \tag{3.10}$$

where, for any vector bundle E and any weight $a \in \mathbb{N}$, we have $s_\bullet\left(E^{(a)}\right) = \frac{1}{a^{\mathrm{rkE}-1}} \sum_{j \ge 0} \frac{s_j(E)}{a^j}$.

Proof. It is enough to check the case where any E_i is a direct sum of line bundles. The formula for $s_\bullet(E^{(a)})$ can be deduced from Proposition 3.2.11, and Whitney's formula (3.10) comes from an easy computation. □

Definition 3.2.13. With the notations of Proposition 3.2.12, we define a *normalized Chern class* of $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ as

$$\bar{c}_\bullet\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{(a_r)}\right) = \left[\frac{a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p}}{\gcd(a_1, ..., a_p)} s_\bullet(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)})\right]^{-1}.$$

A direct computation from Proposition 3.2.12 gives a somewhat simpler version of (3.10).

Proposition 3.2.14. *With the notations of Proposition 3.2.12, we have the following Whitney formula :*

$$\bar{c}_\bullet\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right) = \prod_{1 \le j \le p} \bar{c}_\bullet\left(E_j^{(a_j)}\right), \tag{3.11}$$

where, for any weighted vector bundle $E^{(a)}$, we have $\bar{c}_\bullet(E^{(a)}) = \sum_{j \ge 0} \frac{c_j(E)}{a^j}$.

3.3 Positivity of weighted vector bundles

We now study the extension of the usual positivity properties of vector bundles to the case of weighted vector bundles.

Definition 3.3.1. Let $\mathbb{E} = E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ be a weighted direct sum. We say that $\mathbb{E}^* = E_1^{*(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{*(a_p)}$ is *ample* (resp. *nef*) if for any $m \in \mathbb{N}$ divisible enough, the (standard) line bundle $\mathcal{O}(m)$ is ample (resp. nef) on $\mathbb{P}(\mathbb{E})$.

Remark. With the terminology of [RT11], saying that $\mathbb{E}^*$ is ample amounts to saying that $\mathcal{O}(1)$ is orbi-ample on $\mathbb{P}_X(\mathbb{E})$; this comes from the fact that $\mathbb{P}(E)$ is a *cyclic* orbifold, and that the tautological orbifold line bundle is locally ample by [Dol82].

We will see that the positivity properties of weighted vector bundles are exactly similar to the one of the usual vector bundles, and can be proved in the same manner, following [Laz04b].

Proposition 3.3.2. *Assume that E_1^*, ..., E_p^* are ample on X. Then,*

1. *For any coherent sheaf $\mathcal{F}$ on X, there exists $m_1 \in \mathbb{N}$ such that, for any $m \geq m_1$, the sheaf*

$$\mathcal{F} \otimes \left(\bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots + a_p l_p = m} S^{l_1} E_1^* \otimes \ldots S^{l_p} E_p^* \right)$$

is globally generated.

2. *For any ample divisor H on X, there exists $m_2 \in \mathbb{N}$ such that for any $m \geq m_2$, the sheaf*

$$\bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots + a_p l_p = m} S^{l_1} E_1^* \otimes \ldots \otimes S^{l_p} E_p^*$$

is a quotient of a direct sum of copies of $\mathcal{O}_X(H)$.

3. *If $\mathrm{lcm}(a_1, \ldots, a_p) | m$, then $\mathcal{O}(m)$ is ample on $\mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus \ldots \oplus E_p^{(a_p)})$. In particular, $\mathcal{O}(1)$ is orbi-ample.*

Proof. 1. We show this result by induction on p. If $p = 1$, this comes immediately from the properties of ample vector bundles. Assume $p \geq 2$. By induction hypothesis, since $E_2^*, \ldots, E_p^*$ are ample, there exists m_0 such that $\mathcal{F} \otimes \left(\bigoplus_{a_2 l_2 + \ldots + a_p l_p = m} S^{l_2} E_2^* \otimes \ldots \otimes S^{l_p} E_p^* \right)$ is globally generated if $m \geq m_0$. Besides, since E_1^* is ample, increasing m_0 if necessary, we can suppose that the $S^m E_1^*$ are globally generated if $m \geq m_0$.

Since E_1^* is ample, we can choose m_0' such that $S^{l'} E_1^* \otimes \mathcal{F} \otimes \left(\bigoplus_{a_2 l_2 + \ldots + a_r l_r = l} S^{l_2} E_2^* \otimes \ldots \otimes S^{l_r} E_r^* \right)$ is globally generated if $l' \geq m_0'$ and $l < m_0$. In the same manner, by induction hypothesis, we can find m_0'' such that all

$$S^{l'} E_1^* \otimes \mathcal{F} \otimes \left(\bigoplus_{a_2 l_2 + \ldots + a_r l_r = l} S^{l_2} E_2^* \otimes \ldots \otimes S^{l_r} E_r^* \right)$$

are globally generated if $l' < m_0, l \geq m_0''$. We check easily that we can take $m_1 = \max(a_0 m_0 + m_0, a_0 m_0 + m_0'', a_0 m_0' + m_0)$.

2. It suffices to apply the point 1. to the sheaf $\mathcal{F} = \mathcal{O}(-H)$.

3. Because of 2., there exists $m, N \in \mathbb{N}$ and a surjective morphism

$$\mathcal{O}_X(H)^{\oplus N} \longrightarrow \bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots a_p l_p = m} S^{l_1} E_1^* \otimes \ldots \otimes S^{l_p} E_p^*.$$

Besides, because of Lemma 3.3.3, increasing m if necessary, we can suppose that for any $q \in \mathbb{N}$, the following natural morphism of vector bundles on X is surjective :

$$S^q \left[\bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots a_p l_p = m} S^{l_1} E_1^* \otimes \ldots \otimes S^{l_p} E_r^* \right] \longrightarrow \bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots + a_p l_p = mq} S^{l_1} E_1^* \oplus \ldots \oplus S^{l_p} E_p^*.$$

We obtain a surjective morphism of graded $\mathcal{O}_X$-algebras

$$\bigoplus_{q \geq 0} S^q \left(\mathcal{O}_X(H)^{\oplus N} \right) \longrightarrow \bigoplus_{q \geq 0} \left[\bigoplus_{a_1 l_1 + \ldots + a_p l_p = mq} S^{l_1} E_1^* \otimes \ldots \otimes S^{l_p} E_p^* \right].$$

This morphism determines an embedding

$$\mathbb{P}\left(E_1^{(a_1)} \oplus \ldots \oplus E_p^{(a_p)} \right) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_X(-H)^{\oplus N} \right),$$

with $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_X(-H)^{\oplus N})}(1)|_{\mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus \ldots \oplus E_p^{(a_p)})} \cong \mathcal{O}(qm)$. Since the tautological line bundle on $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X(-H)^{\oplus N})$ is ample (cf. [Laz04b]), this ends the proof. □

Lemma 3.3.3. *Let $E_1, ..., E_p$ be $\mathbb{C}$-vector spaces, and let $a_1, ..., a_p \in \mathbb{N}^*$. Then, for any $m \in \mathbb{N}$ divisible enough, the natural linear maps*

$$S^q \left[\bigoplus_{a_1 l_1 + ... + a_p l_p = m} S^{a_1} E_1 \otimes ... \otimes S^{a_p} E_p \right] \longrightarrow \bigoplus_{a_1 l_1 + ... + a_p l_p = mq} S^{a_1} E_1 \otimes ... \otimes S^{a_p} E_p$$

are onto for all $q \geq 1$.

Proof. Because of [Dol82], if m is sufficiently large and divisible by $\mathrm{lcm}(a_1, ..., a_r)$, the (standard) line bundle $\mathcal{O}(m)$ on the weighted projective space $\mathbb{P}_{\mathrm{pt}}(E_1^{*(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{*(a_p)})$ is very ample. Consequently, there exists an integer $q \in \mathbb{N}$ such that $S^p H^0(\mathcal{O}(mq)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(mqp))$ is onto for all $p \geq 1$, which gives the result. □

We will now study the case of nef line bundles. We will prove the following result.

Proposition 3.3.4. *Let $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ be a weighted direct sum. Assume that $E_1^*, ..., E_p^*$ are nef. Then, if m is sufficiently divisible, the line bundle $\mathcal{O}(m)$ is nef on $\mathbb{P}\left(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}\right)$.*

To this aim, we will use the formalism of vector bundles twisted by rational classes (see [Laz04b] for the definition and the positivity properties of these objects). As in the weightless case, we naturally define the notion of ampleness for a weighted sum of twisted vector bundles :

Definition 3.3.5. Let $\delta \in N^1(X)_{\mathbb{Q}}$, and let $E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p^{(a_p)}$ be a weighted direct sum. We say that the weighted direct sum of twisted vector bundles

$$E_1 < a_1 \delta >^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_p < a_p \delta >^{(a_p)}$$

is *ample*, if for any m, divisible by $\mathrm{lcm}(a_1, ..., a_p)$ the $\mathbb{Q}$-line bundle

$$\mathcal{O}(m) \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(m\delta)$$

is ample on $\mathbb{P}\left(E_1^{*(a_1)} \oplus ... E_p^{*(a_p)}\right)$.

Remark. In Definition 3.3.5, we consider twists of the form $a_1\delta, ..., a_r\delta$ with $\delta \in N^1(X)_{\mathbb{Q}}$. This is related to the fact that if $E_1, ..., E_r$ are vector bundles, and if L is a line bundle, we have, for any m,

$$\bigoplus_{a_1 l_1 + ... + a_r l_r = m} S^{l_1}(E_1^* \otimes L^{\otimes a_1}) \otimes ... \otimes (E_r^* \otimes L^{\otimes a_r}) = L^{\otimes m} \otimes \bigoplus_{a_1 l_1 + ... + a_r l_r = m} S^{l_1} E_1^* \otimes ... \otimes E_r^*,$$

which implies in particular that $P' = \mathbb{P}\left((E_1 \otimes L^{*\otimes a_1})^{(a_1)} \otimes ... \otimes (E_p \otimes L^{*\otimes a_p})^{(a_p)}\right)$ is identified to $P = \mathbb{P}(E_1^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{(a_r)})$, with $\mathcal{O}_{P'}(m) \cong \mathcal{O}_P(m) \otimes p^* L^{\otimes m}$.

Lemma 3.3.6. *Let $E_1 < a_1\delta >, ..., E_r < a_r\delta >$ be twisted vector bundles on X. Assume that each $E_i^* < -a_i\delta >$ is ample. Then the weighted direct sum*

$$E_1^* < -a_1\delta >^{(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^* < -a_r\delta >^{(a_r)}$$

is ample.

Proof. We follow directly the proof presented in [Laz04b]. Because of Bloch-Gieseker theorem about ramified covers (see [Laz04b, Theorem 4.1.10]), there exist a finite, surjective, flat morphism $f : Y \longrightarrow X$, where Y is a variety, and a divisor A such that $f^*\delta \equiv_{lin} A$.

We have a fibered diagram

$$\begin{tikzcd} P' = \mathbb{P}_Y\left(f^*E_1^{*(a_1)} \oplus ... \oplus f^*E_r^{*(a_r)}\right) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbb{P}_X(E_1^{*(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{*(a_r)}) = P \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}.$$

Let $Q = \mathbb{P}_Y\left((f^*E_1^* \otimes \mathcal{O}(a_1A))^{(a_1)} \oplus ... \oplus (f^*E_r^* \otimes \mathcal{O}(a_rA))^{(a_r)}\right)$. Then, we have a canonical identification $Q \cong P'$, which leads to identifying the line bundle $\mathcal{O}_Q(m)$ with $\mathcal{O}_{P'}(m) \otimes \pi_Y^*\mathcal{O}_Y(mA)$, as mentioned in Remark 3.3.

Besides, the $\mathbb{Q}$-line bundle

$$g^*\left(\mathcal{O}_P(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(m\delta)\right) \tag{3.12}$$

is canonically identified to $\mathcal{O}_{P'}(m) \otimes \pi_Y^*\mathcal{O}_Y(mA)$, thus to $\mathcal{O}_Q(m)$. However, since each $E_i^* < -a_i\delta >$ is ample, and since f is finite, each vector bundle $f^*E_i^* \otimes \mathcal{O}(-a_iA)$ is ample. Because of Proposition 3.3.2, the line bundle $\mathcal{O}_Q(m)$ is ample, so the line bundle (3.12) is ample. But g is finite and surjective, so $\mathcal{O}_P(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(m\delta)$ is ample on P, which gives the result. □

Proof of Proposition 3.3.4. It suffices to show that for any ample class $h \in N_1(X)_{\mathbb{Q}}$, the class $\mathcal{O}(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}(mh)$ is ample. Let h be such a class. Then since each E_i^* is nef, the twisted vector bundles $E_i^* < a_ih >$ are ample for any i. Consequently, by Lemma 3.3.6 and Definition 3.3.5, if $\mathrm{lcm}(a_1, ..., a_r)|m$, the line bundle

$$\mathcal{O}(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(mh)$$

is ample on $\mathbb{P}(E_1^{*(a_1)} \oplus ... \oplus E_r^{*(a_r)})$. This gives the result. □

3.3.1 An example of combinatorial application

We present now some simple examples of applications of the previous discussion, in which we will use an orbifold asymptotic Riemann-Roch theorem permitting to estimate the number of orbifold global sections of the powers of some orbi-ample orbifold line bundle. Let us briefly recall what we call an *orbifold global section* of an orbifold line bundle. Consider an orbifold X, endowed with an orbifold line bundle L. The orbifold structure of X is defined by the data of local orbifold charts (U, G), where U is an open subset of an affine space $\mathbb{C}^n$, and G is a finite group acting on U by biholomorphisms, all these charts satisfying some compatibility conditions. Then, the line bundle L corresponds to the data of a local trivialization $L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ for each one of these charts, together with an equivariant action of G on $L|_U \longrightarrow U$, with another compatibility condition between charts. An *orbifold global section* of L on X, is the data, for each chart (U, G), of a section $s_{(U,G)} \in \Gamma(U, L|_U) \cong \mathcal{O}(U)$, invariant under the action of G, such that all the sections $s_{(U,G)}$ are compatible on overlapping charts. The space of all orbifold global sections of L on X will be denoted by $H^0_{orb}(X, L)$; we let $h^0_{orb}(X, L)$ be the dimension of this space.

Then, we have the following asymptotic Riemann-Roch theorem, which can be proved using Toën's work [Toë99] (see also [RT11]).

Theorem 3.3.7 ([Toë99, RT11])**.** *Let X be a cyclic orbifold of dimension n, and let $L \longrightarrow X$ be an orbifold line bundle. Assume that L is orbi-ample. Then we have the following asymptotic growth*

$$h^0_{orb}(X, L^{\otimes m}) = \left(\int_X c_1(L)^n\right)\frac{m^n}{n!} + O(m^{n-1}).$$

Remark that if X and L satisfy the hypothesis of the previous theorem, and $\pi : X \longrightarrow X_0$ the projection to the coarse moduli space of X, then for each $m \in \mathbb{N}$, we have an inclusion $H^0\left(X_0, \pi_*\left(L^{\otimes m}\right)\right) \subset H^0_{orb}\left(X, L^{\otimes m}\right)$. Indeed, any section of $\pi_*\left(L^{\otimes m}\right)$ can be pulled-back locally to X to define a set of local sections of L^m, invariant under the isotropy groups. Thus, we have $h^0\left(X_0, \pi_*\left(L^{\otimes m}\right)\right) \le h^0_{orb}(X, L^{\otimes m})$. This inequality is strict in general, since the local sections defining an orbifold global section on X do not glue in general if we push them forward to X_0.

Then, we can apply Theorem 3.3.7 and the results of the previous sections to obtain the following combinatorial result, which will turn out to be useful in Section 3.5, where we deal with jet bundles on a minimal toroidal compactification of a quotient of the ball.

Proposition 3.3.8. *Let $k, n \in \mathbb{N}$. We have the following asymptotic upper bound, as $r \longrightarrow +\infty$:*

$$\sum_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=r} \frac{(j_1+\ldots+j_k)^n}{n!} \le \frac{1}{k!}\left[\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k} \frac{1}{i_1\ \ldots\ i_n}\right] \frac{r^{n+k-1}}{(n+k-1)!} + O(r^{n+k-2}).$$

Proof. Let X be an abelian variety of dimension n, endowed with an ample line bundle L. Because of Proposition 3.3.2, the weighted direct sum $L^{(1)} \oplus \ldots \oplus L^{(k)}$ is ample on X. This means that the orbifold line bundle $\mathcal{O}(1)$ is orbi-ample on $P = \mathbb{P}_X\left(L^{*(1)} \oplus \ldots \oplus L^{*(k)}\right)$. By Theorem 3.3.7 we have then, for any $m \in \mathbb{N}$,

$$h^0_{orb}(\mathbb{P}, \mathcal{O}(m)) \le \int_P c_1\mathcal{O}(1)^{n+k-1} \frac{m^{n+k-1}}{(n+k-1)!} + O(m^{n+k-1}).$$

However, because of Definition 3.2.7 and Proposition 3.2.12, the quantity $\int_X c_1\mathcal{O}(1)^{n+k-1}$ can be computed as

$$\begin{aligned}\int_P c_1\mathcal{O}(1)^{n+k-1} &= \int_X s_n\left(L^{*(1)} \oplus \ldots \oplus L^{*(k)}\right)\\ &= \frac{1}{k!}\int_X \left\{\left(\sum_i H^i\right)\cdots\left(\sum_i \frac{H^i}{l^i}\right)\cdots\left(\sum_i \frac{H^i}{k^i}\right)\right\}_n,\end{aligned}$$

where $H = c_1(L)$. Expending the computation yields

$$\begin{aligned}\int_P c_1\mathcal{O}(1)^{n+k-1} &= \frac{(L^n)}{k!}\left[\sum_{l_1+\ldots+l_k=n} \frac{1}{1^{l_1}\ \ldots\ k^{l_k}}\right]\\ &= \frac{(L^n)}{k!}\left[\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k} \frac{1}{i_1\ \ldots\ i_k}\right].\end{aligned}$$

To obtain the result, it suffices to remark that $H^0(X, \bigoplus_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=m} L^{\otimes(j_1+\ldots+j_k)})$ can be identified to the space of global sections of the push-forward of $\mathcal{O}(m)$ to the coarse moduli space of P. Thus :

$$h^0(X, \bigoplus_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=m} L^{\otimes(j_1+\ldots+j_k)}) \le h^0_{orb}(P, \mathcal{O}(m)).$$

Besides, a direct application of Riemann-Roch-Hirzebruch theorem and Kodaira vanishing theorem on X gives

$$h^0(X, L^{\otimes(j_1+\ldots+j_k)}) = \frac{(j_1+\ldots+j_k)^n}{n!}(L^n)$$

if $j_1 + \ldots j_k \ne 0$. Combining all these applications, we get the inequality. □

We can also get back the following classical result (see [Dem11])

Proposition 3.3.9. *Let $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$. Let $X = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ be the associated weighted projective space, endowed with its tautological orbifold line bundle $\mathcal{O}_X(1)$. We then have the asymptotic estimate*

$$h^0_{\text{orb}}(X, \mathcal{O}_X(m)) = \frac{\gcd(a_0, \ldots, a_n)}{\prod_j a_j} \frac{m^n}{n!} + O(m^{n-1}).$$

Proof. It is clear that the weighted direct sum $\mathbb{C}^{(a_0)} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{(a_n)} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ is ample, which means that $\mathcal{O}_X(1)$ is orbi-ample. Then, using [RT11] and Definition 3.2.7,

$$\begin{aligned} h^0_{\mathrm{orb}}(X, \mathcal{O}_X(m)) &= \int_X c_1 \mathcal{O}(1)^n \cdot \frac{m^n}{n!} + O(m^{n-1}) \\ &= s_0(\mathbb{C}^{(a_0)} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{(a_n)}) \frac{m^n}{n!} + O(m^{n-1}). \end{aligned}$$

Besides, because of Proposition 3.2.11, we have $s_0(\mathbb{C}^{(a_0)} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{(a_n)}) = \frac{\gcd(a_0,\dots,a_n)}{\prod_j a_j}$, which gives the result. □

3.4 Green-Griffiths jet bundles

3.4.1 Deformation of the jet spaces

We first remark that for any projective complex manifold, there is a natural deformation of its Green-Griffiths jets spaces to a weighted projectivized bundles, which will permit us to apply the previous discussion to the study of jet differentials.

Let X be a projective complex manifold. For $k \in \mathbb{N}$, we consider the Green-Griffiths jet differentials algebra $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$. Recall (cf. [Dem12]) that $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$ is endowed with a natural filtration, whose graded algebra can be written

$$\operatorname{Gr}^\bullet\left(E^{GG}_{k,\bullet}\right) = \operatorname{Sym}\Omega_X^{(1)} \otimes ... \otimes \operatorname{Sym}\Omega_X^{(k)}.$$

where, as before, $\Omega_X^{(l)}$ denotes the $\mathcal{O}_X$-algebra generated by the sections of Ω_X in degree l. Hence, using the Rees deformation construction (see for example [BG96]), there exists a graded $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}}$-algebra $\mathcal{E}^{GG}_{k,\bullet}$ on $X \times \mathbb{C}$, such that for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{E}^{GG}_{k,\bullet}\big|_{X\times\{\lambda\}}$ is identified to $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$, and $\mathcal{E}^{GG}_{k,\bullet}\big|_{X\times\{0\}}$ is identified to $\operatorname{Gr}^\bullet\left(E^{GG}_{k,\bullet}\right)$. Applying the **Proj** functor, we obtain the following result.

Proposition 3.4.1. *For any complex projective manifold X, and for any $k \in \mathbb{N}^*$, there exists a morphism of varieties $\mathcal{X}^{GG}_k \longrightarrow X \times \mathbb{C}$, and an orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)$ on $\mathcal{X}^{GG}_k$, such that :*

1. *for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{X}^{GG}_k\big|_\lambda$ is identified to X^{GG}_k, and $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)\Big|_\lambda$ identified to $\mathcal{O}^{GG}_k(1)$;*
2. *the fibre $\mathcal{X}^{GG}_k\big|_0$ is identified to $\mathbf{Proj}_X\left(\operatorname{Gr}^\bullet\left(E^{GG}_{k,\bullet}\right)\right) \cong \mathbb{P}_X\left(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)}\right)$, and $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)\Big|_0$ is identified to the tautological line bundle of this weighted projective bundle.*

We can now show that some usual positivity properties of the cotangent bundle can be transmitted to the higher order jet differentials.

Proposition 3.4.2. *If Ω_X is ample (resp. nef), then for any $k \in \mathbb{N}^*$, $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$ is ample (resp. nef), meaning that $\mathcal{O}^{GG}_k(1)$ is ample (resp. nef) as an orbifold line bundle.*

Proof. Let $\mathcal{X}^{GG}_k \longrightarrow X \times \mathbb{C}$ be the variety given by Proposition 3.4.1, endowed with its orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)$.

Assume first that Ω_X is ample. Then, because of Proposition 3.3.2, a suitable power of the tautological line bundle $\mathcal{O}(m)$ is ample on $\mathbb{P}(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)})$ if m is sufficiently divisible. Because of Proposition 3.4.1, it means that $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)|_0$ is ample. By openness of the ampleness property, for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$ in a Zariski neighborhood of 0, the orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)|_\lambda$ is ample. Again because of Proposition 3.4.1, this means exactly that $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_X$ is ample.

The case where Ω_X is nef is dealt with in the same manner, using Proposition 3.3.4, and the fact that if $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)|_0$ is nef, then $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{GG}_k}(1)|_\lambda$ is nef for any very general $\lambda \in \mathbb{C}$ (see [Laz04a]). □

The previous discussion extends naturally to the case of logarithmic jet differentials. Let us recall briefly what these objects are (see [NW14]) for a more precise discussion). Let (X, D) be a smooth projective log-pair, i.e. the data of a projective manifold X with a simple normal crossing divisor D. Let $(z_1, ..., z_n)$ are local coordinates on some open subset $U \subset X$, such that a local equation for D is given by $z_{l+1}...z_n = 0$. Then a logarithmic jet differential of order k is defined locally as a differential operator P acting on curves $f : \Delta \subset \mathbb{C} \longrightarrow U$, of the form

$$P(f) = \sum_i a_i(f)(f_1')^{m_{1,1,i}}...(f_k')^{m_{1,l,i}} \left[\frac{f_{l+1}'}{z_{l+1}}\right]^{m_{1,k+1,i}} ... \left[\frac{f_n'}{z_n}\right]^{m_{1,n,i}} ... \\ ... (f_1^{(k)})^{m_{k,1,i}}...(f_l^{(l)})^{m_{k,l,i}} \left[\frac{f_{l+1}^{(k)}}{z_{l+1}}\right]^{m_{k,l+1,i}} ... \left[\frac{f_n^{(k)}}{z_n}\right]^{m_{k,n,i}}.$$

As in the case of ordinary jet differentials, we have a notion of weighted degree for such an equation. Also, the logarithmic jet differentials of order k and degree m on the pair (X, D) can be seen as holomorphic sections of a vector bundle $E_{k,m}^{GG}\Omega_X(\log D)$, and we can define the space of jet differentials $X_k^{GG,\log}$ by projectivizing the $\mathcal{O}_X$-algebra $\bigoplus_{m\geq 0} E_{k,m}^{GG}\Omega_X(\log D)$. We then have the following proposition.

Proposition 3.4.3. *Let (X, D) be a smooth projective log-pair. For any $k \in \mathbb{N}^*$, there exists a morphism $\mathcal{X}_k^{GG,\log} \longrightarrow X \times \mathbb{C}$ and an orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG,\log}}(1)$ on $\mathcal{X}_k^{GG,\log}$ such that*

1. *for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{X}_k^{GG,\log}\big|_\lambda$ is identified to $X_k^{GG,\log}$, and $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG,\log}}(1)\Big|_\lambda$ can be identified to the tautological orbifold line bundle $\mathcal{O}_k^{GG,\log}(1)$;*
2. *the fibre $\mathcal{X}_k^{GG,\log}\big|_0$ is identified to $\mathbf{Proj}_X \mathrm{Gr}^\bullet\left(E_{k,\bullet}^{GG}\right) \cong \mathbb{P}_X\left(T_X(-\log D)^{(1)} \oplus ... \oplus T_X(-\log D)^{(k)}\right)$, and $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG,\log}}(1)\Big|_0$ is identified to the tautological orbifold line bundle of this weighted projectivized bundle.*

Proof. As before, it suffices to use the fact that $E_{k,m}^{GG}\Omega_X(\log D)$ admits a filtration whose graded algebra is

$$\mathrm{Sym}\,\Omega_X(\log D)^{(1)} \otimes ... \otimes \mathrm{Sym}\,\Omega_X(\log D)^{(k)}.$$

□

In this setting, Proposition 3.4.2 extends naturally :

Proposition 3.4.4. *Let (X, D) be a smooth log-pair. If $\Omega_X(\log D)$ is ample (resp. nef), then for any $k \in \mathbb{N}^*$, $E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X(\log D)$ is ample (resp. nef), meaning that $\mathcal{O}_{X_k^{GG,\log}}(1)$ is ample (resp. nef) as orbifold line bundle.*

Remark that if this holds, the volume of $\mathcal{O}_{X_k^{GG,\log}}(1)$ is simply given by the top intersection number $c_1\left(\mathcal{O}_{X_k^{GG,\log}}(1)\right)^n$. As we will see later on (see (3.14)), this last number is equal to the degree of the top Segre class $s_n\left(\Omega_X(\log D)^{(1)} \oplus ... \oplus \Omega_X(\log D)^{(k)}\right)$.

The following result, combining two theorems of Campana and Păun [CP15], and Demailly [Dem11], shows that the bigness of the canonical orbifold line bundle $\mathcal{O}(1)$ on $\mathbb{P}(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)})$ for k large enough suffices to characterize the manifolds of general type.

Proposition 3.4.5. *Let X be a projective smooth manifold. The following assertions are equivalent.*

(i) X is of general type ;

(ii) for large k, $E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_X$ is big, meaning that the standard line bundle $\mathcal{O}_k^{GG}(m) \longrightarrow X_k^{GG}$ is big for m sufficiently divisible ;

(iii) for large k, the orbifold line bundle $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{P}_X(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)})$ is big, i.e. the line bundle $\mathcal{O}(m)$ is big for m sufficiently divisible.

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$. This is the main result of [Dem11], see Theorem 0.3.6.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Let $k \in \mathbb{N}^*$ large enough, and consider a sufficiently divisible $m \in \mathbb{N}^*$. Let $\mathcal{X}_k^{GG} \longrightarrow X \times \mathbb{C}$ be the variety given by Proposition 3.4.1, endowed with its tautological orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(1)$. For any $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)|_\lambda$ is identified to $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(m)$, which is big. Consequently , there exists a constant $C > 0$, such that for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$h^0\left(\mathcal{X}_k^{GG}\big|_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)|_\lambda \right) \geq C m^{n+nk-1}.$$

Since $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)$ is flat on the base $\mathbb{C}$, we deduce by semi-continuity that

$$h^0\left(\mathcal{X}_k^{GG}\big|_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(m)|_0 \right) \geq C m^{n+nk-1}.$$

Besides, $X_k^{GG}|_0$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k^{GG}}(1)|_0$ are identified with $\mathbb{P}_X(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)})$ and to its tautological line bundle, so the previous inequality means exactly that $\mathcal{O}(1)$ is big on $\mathbb{P}(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)})$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Let $k \gg 1$ be such that $\mathcal{O}(1)$ is big on $\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(T_X^{(1)} \oplus ... \oplus T_X^{(k)}\right)$. Then for m divisible enough, and for some ample line bundle A on X, the line bundle $\mathcal{O}(m) \otimes \pi^* A^{-1}$ is effective, where $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow X$ is the canonical projection. Thus,

$$H^0\left(\mathbb{P}, \mathcal{O}(m) \otimes \pi^* A^{-1}\right) = \bigoplus_{l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m} S^{l_1}\Omega_X \otimes ... \otimes S^{l_k}\Omega_X \otimes A^{-1} \neq 0.$$

Thus $h^0(X, \otimes^N \Omega_X \otimes A^{-1}) \neq 0$ for some $N \in \mathbb{N}^*$, so by [CP15], X is of general type. □

3.5 Application to the minimal toroidal compactifications of ball quotients

In this section, we will use the previous considerations to construct global jet differentials of high order on minimal toroidal compactifications of ball quotients, as constructed in [Mok12]

Let $\Gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ be a torsion-free lattice with only unipotent parabolic isometries. Then, as explained in Chapter 2, by [AMRT10] and [Mok12], we can compactify the quotient $X = \mathbb{B}^n/\Gamma$ into a smooth minimal toroidal compactification $\overline{X} = X \sqcup D$, where D is a disjoint union of abelian varieties. From now, on, $\overline{X}$ will always denote such a minimal toroidal compactification of a ball quotient.

Let $k \in \mathbb{N}^*$, and let $\mathcal{X}_k^{GG,\log} \longrightarrow \overline{X} \times \mathbb{C}$ be a family as given by Proposition 3.4.3. Denote by $P_k^{GG,\log} \subset \mathcal{X}_k^{GG,\log}$ the fibre above $0 \subset \mathbb{C}$, which is isomorphic to $\mathbb{P}_{\overline{X}}(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus ... \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)})$.

Proposition 3.5.1. *The orbifold line bundle $\mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(1) \longrightarrow \overline{X}_k^{GG,\log}$ is nef.*

Proof. The vector bundle $\Omega_{\overline{X}}(\log D)$ is nef because of Theorem 2.1.5. Thus, the result comes from Proposition 3.4.2. □

If $m_0 = \mathrm{lcm}(1, ..., k)$, the standard line bundle $\mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(m_0)$ is nef. Since the higher cohomology groups of the powers of a nef line bundle have a less than maximal growth (see [Laz04b]), this gives the following asymptotic expansion :

$$\begin{aligned} h^0(\overline{X}, E_{k,lm_0}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)) &= h^0(\overline{X}_k^{GG}, \mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(lm_0)) \\ &= \chi(\overline{X}_k^{GG}, \mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(lm_0)) + O(l^{n+nk-2}) \\ &= \left(\int_{\overline{X}_k^{GG,\log}} c_1 \mathcal{O}(m_0)^{m+nk-1} \right) l^{n+nk-1} + O(l^{n+nk-2}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

We can compute the leading coefficient of this last expansion, by making the fibre vary in the family $\mathcal{X}_k^{GG,\log}$. Let $i_0 : P_k^{GG,\log} \cong \mathcal{X}_k^{GG,\log}|_0 \hookrightarrow \mathcal{X}_k^{GG,\log}$ and $i_1 : \overline{X}_k^{GG,\log} \cong \mathcal{X}_k^{GG,\log}|_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_k^{GG,\log}$ be the canonical inclusions. Then $i_0^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0) = \mathcal{O}_P(m_0)$ and $i_1^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0) = \mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(m_0)$. With these notations, we have

$$\begin{aligned}\int_{\overline{X}_k^{GG,\log}} c_1\mathcal{O}(m_0)^{m+nk-1} &= c_1\mathcal{O}_{\overline{X}_k^{GG,\log}}(m_0)^{m+nk-1} \cap \left[\overline{X}_k^{GG,\log}\right] \\ &= c_1\left(i_1^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)\right)^{m+nk-1} \cap \left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_1\right] \\ &= c_1\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)^{m+nk-1} \cap (i_1)_*\left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_1\right],\end{aligned}$$

where at the last line we applied the projection formula to the proper morphism i_1. Now, remark that the fibres of the flat morphism $\mathcal{X}_k^{GG,\log} \longrightarrow \mathbb{C}$ are all rationally equivalent cycles. Thus

$$c_1\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)^{m+nk-1} \cap (i_1)_*\left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_1\right] = c_1\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)^{m+nk-1} \cap (i_0)_*\left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_0\right]$$

Now, performing the same steps in reverse using the morphism i_1, we finally get

$$\begin{aligned}\int_{\overline{X}_k^{GG,\log}} c_1\mathcal{O}(m_0)^{m+nk-1} &= c_1\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)^{m+nk-1} \cap (i_0)_*\left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_0\right] \\ &= c_1\left(i_0^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m_0)\right)^{m+nk-1} \cap \left[\mathcal{X}_k^{GG,\log}|_0\right] \\ &= c_1\mathcal{O}_P(m_0)^{m+nk-1} \cap \left[P_k^{GG,\log}\right]\end{aligned}$$

Consequently, using Definition 3.2.7, we find

$$\int_{\overline{X}_k^{GG,\log}} c_1\mathcal{O}(m_0)^{m+nk-1} = m_0^{n+nk-1} \int_{\overline{X}} s_n(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)}).$$

If we insert this equation in (3.13), we see that if $m \in \mathbb{N}$ is divisible by m_0, we have

$$\begin{aligned}h^0(\overline{X}, E_{k,m}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)) = \int_{\overline{X}} & s_n(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)})\ \frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!} \\ &+ O\left(m^{n+nk-2}\right).\end{aligned}$$

This gives the following value for the volume of $E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)$:

$$\operatorname{vol}\left(E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) = \int_{\overline{X}} s_n(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)}). \tag{3.14}$$

3.5.1 Combinatorial expression of the volume. Uniform lower bound in k

The volume (3.14) can be expressed as a certain universal polynomial with rational coefficients in the Chern classes of $T_{\overline{X}}(-\log D)$. The same polynomial, applied to the Chern classes of $T_{\mathbb{P}^n}$ over $\mathbb{P}^n$, permits to compute $\int_{\mathbb{P}^n} s_n(T_{\mathbb{P}^n}^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbb{P}^n}^{(k)})$, and Hirzebruch proportionality principle in the non-compact case (see [Mum77]) implies

$$\int_{\overline{X}} s_n(T_{\overline{X}}(-\log D)^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\overline{X}}(-\log D)^{(k)}) = (-1)^n \frac{(K_{\overline{X}}+D)^n}{(n+1)^n} \int_{\mathbb{P}^n} s_n(T_{\mathbb{P}^n}^{(1)} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbb{P}^n}^{(k)})$$

Using Proposition 3.2.12, we can give an explicit combinatorial expression of this last quantity. Indeed, if we let $H = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, since $s_\bullet(T_{\mathbb{P}^n}) = \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i H^i\right)^{n+1}$, we find

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_{\mathbb{P}^n} & s_n(T_{\mathbb{P}^n}^{(1)} \oplus ... \oplus T_{\mathbb{P}^n}^{(k)}) \\ &= \frac{(-1)^n}{(k!)^n}\left\{\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i H^i\right)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{H^i}{2^i}\right)^{n+1} \cdot .... \cdot \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{H^i}{k^i}\right)^{n+1} \cdot [\mathbb{P}^n]\right\}_0 \\ &= \frac{1}{(k!)^n}\sum_{l_{1,1}+l_{1,2}+...+l_{n+1,k}=n} \frac{1}{1^{l_{1,1}+l_{2,1}+...+l_{n+1,1}} \cdot ... \cdot k^{l_{1,k}+...+l_{n+1,k}}}(H^n \cdot [\mathbb{P}^n]).\end{aligned}$$

where each index $l_{i,j}$ ($i \in [\![1, n+1]\!]$, $j \in [\![1, k]\!]$) represents a possible choice of power for H in the i-th factor of the product $\left(\sum_{l=1}^n (-1)^l \frac{H^l}{j^l}\right)^{n+1}$. Thus, we see that choosing exponents $(l_{i,j})_{1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq k}$ such that $\sum_{i,j} l_{i,j} = n$ amounts to choosing a non-decreasing sequence $u_1 \leq ... \leq u_n$ of elements of the ordered set

$$S_{k,n} = \{1_1 < ... < 1_{n+1} < 2_1 < ... < 2_{n+1} < ... < k_1 < ... < k_{n+1}\},$$

where each integer between 1 and k is repeated $n+1$ times. The bijection between the set of choices of $(l_{i,j})$ and the set of sequences $u_1 \leq ... \leq u_n$ can easily be made explicit : to $(l_{i,j})$, we associate the sequence (u_i), where the element j_m is repeated $l_{m,j}$ times. Thus, we find

$$(-1)^n \int_{\mathbb{P}^n} s_n(T_{\overline{X}}^{(1)} \oplus ... \oplus T_{\overline{X}}^{(k)}) = \frac{1}{(k!)^n}\sum_{\{u_1 \leq ... \leq u_n\} \subset S_{k,n}} \frac{1}{u_1 ... u_n},$$

where, in the quotient appearing on the right hand side, we compute the product by treating the elements of $S_{k,n}$ as ordinary integers (we forget their indexes).

We then find an explicit combinatorial formula for the volume of logarithmic jet differentials of order k :

Proposition 3.5.2. *Let $\overline{X}$ be a smooth minimal toroidal compactification of a ball quotient by a lattice with only unipotent parabolic isometries. Then, we have :*

$$\mathrm{vol}\left(E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) = \frac{\left(K_{\overline{X}} + D\right)^n}{(n+1)^n (k!)^n}\sum_{\{u_1 \leq ... \leq u_n\} \subset S_{k,n}} \frac{1}{u_1 ... u_n}. \tag{3.15}$$

Remark. We can see that when $k \longrightarrow +\infty$, the terms that we have the largest contribution in this sum are the ones for which the u_i are all distinct. Modulo terms where the same elements of $S_{k,n}$ are repeated, we can write :

$$\begin{aligned}\sum_{\{u_1 \leq ... \leq u_n\} \subset S_{k,n}} \frac{1}{u_1 ... u_n} &\sim \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1_1} + \frac{1}{1_2} + ... + \frac{1}{1_{n+1}} + \frac{1}{2_1} + ... + \frac{1}{2_{n+1}} + ... + \frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_{n+1}}\right)^n. \\ &= \frac{1}{n!}\left((n+1) \cdot (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k})\right)^n \\ &\sim (n+1)^n \frac{(\log k)^n}{n!},\end{aligned}$$

Inserting the last estimate in (3.15), we find

$$\mathrm{vol}\left(E_{k,\bullet}^{GG}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) \sim \left(K_{\overline{X}} + D\right)^n \frac{(\log k)^n}{(k!)^n \, n!},$$

which is a special case of Demailly's estimate [Dem11], applied to the logarithmic Green-Griffiths jet differentials.

We can obtain relatively precise estimates from (3.15). By a computation similar to the one of the previous remark, we can write :

$$
\begin{aligned}
n! \sum_{\{u_1 \leq \ldots \leq u_n\} \subset S_{k,n}} \frac{1}{u_1 \ldots u_n} &\geq \sum_{(u_1,\ldots,u_n) \in S_{k,n}^n} \frac{1}{u_1 \ldots u_n} \\
&= \left(\sum_{u \in S_{k,n}} \frac{1}{u} \right)^n \\
&= (n+1)^n \left(1 + 1/2 + \ldots + 1/k\right)^n \geq (n+1)^n (\log k + \gamma)^n \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

where, in the first inequality, we use the fact that for any ordered set $\{u_1 \leq \ldots \leq u_n\}$, the number of distinct n-uples $(v_1, \ldots, v_n)$ having the same elements is at least $n!$. The letter γ represents the Euler-Mascheroni constant.

We obtain the following lower bound, *valid for any* $k \geq 1$:

$$\mathrm{vol}\left(E_{k,\bullet}^{GG} \Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) \geq \left(K_{\overline{X}} + D\right)^n \frac{(\log k + \gamma)^n}{(k!)^n \, n!}.$$

3.6 Upper bound on the vanishing conditions on the boundary

We now study the number of vanishing conditions on the boundary that a logarithmic jet differential must satisfy to be a standard one.

For any $k \in \mathbb{N}^*$, and any $m \in \mathbb{N}$, we define a coherent sheaf $\mathcal{Q}_{k,m}$, supported on D, in the following manner :

$$0 \longrightarrow E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}} \longrightarrow E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}(\log D) \longrightarrow \mathcal{Q}_{k,m} \longrightarrow 0. \qquad (3.17)$$

Then, we have :

$$h^0(\overline{X}, E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}) \ \geq \ h^0(\overline{X}, E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}(\log D)) - h^0(\overline{X}, \mathcal{Q}_{k,m}). \qquad (3.18)$$

3.6.1 Filtration on the quotient $\mathcal{Q}_{k,m}$

Our goal is to obtain an upper bound on $h^0(\mathcal{Q}_{k,m})$, as $m \longrightarrow +\infty$, with fixed $k \in \mathbb{N}$. To do this, we will produce a sufficiently sharp filtration on the sheaf $\mathcal{Q}_{k,m}$, so that the graded terms can be considered as locally free $\mathcal{O}_D$-modules. We will then the bound from above the number of global sections of these graded terms.

Proposition 3.6.1. *The inclusion of* (3.17) *preserves the natural filtrations on the vector bundles* $E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}$ *and* $E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}(\log D)$.

Proof. We only need to check this locally : this inclusion sends an jet differential equation of the form $\prod_{i,l} (f_i^{(l)})^{a_{i,l}}$ on $\prod_{i \neq n, l} (f_i^{(l)})^{a_{i,l}} \cdot \prod_l z_n^{a_{i,l}} (\frac{f_n^{(l)}}{z_n})^{a_{i,l}}$. The exponents of the different $f_i^{(l)}$ are then preserved by the inclusion, so the natural filtrations are also preserved. □

Consequently, $\mathcal{Q}_{k,m}$ admits a induced filtration F_1, whose graded terms can be written as a quotient of the corresponding graded terms in $E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}$ and $E_{k,m}^{GG} \Omega_{\overline{X}}(\log D)$:

$$\mathrm{Gr}_{\bullet}^{F_1}(\mathcal{Q}_{k,m}) = \bigoplus_{l_1 + 2l_2 + \ldots + kl_k = m} \left[S^{l_1} \Omega_{\overline{X}}(\log D) \otimes \ldots \otimes S^{l_k} \Omega_{\overline{X}}(\log D)\right] \Big/ \left[S^{l_1} \Omega_{\overline{X}} \otimes \ldots \otimes S^{l_k} \Omega_{\overline{X}}\right]. \qquad (3.19)$$

We will now produce successive refinements of the filtration F_1, until we obtain a filtration whose graded terms are all locally free $\mathcal{O}_D$-modules. We can already simplify the quotient appearing in (3.19), using the following elementary result.

Lemma 3.6.2. *Let $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_l$ be $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules. For any i, we consider a sub-module $\mathcal{E}'_i \hookrightarrow \mathcal{E}_i$. Then the quotient* $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_l \big/ \mathrm{Im}\left(\mathcal{E}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}'_l \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_l\right)$ *admits a filtration whose i-th graded term can be identified with*

$$\mathcal{E}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}'_{i-1} \otimes \left(\mathcal{E}_i \big/ \mathcal{E}'_i\right) \otimes \mathcal{E}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_l.$$

Proof. It suffices to consider the induced filtration on $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \mathcal{E}_l \big/ \mathrm{Im}\left(\mathcal{E}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}'_l\right)$ by the images of any of the sheaves appearing in the sequence of morphisms

$$\mathcal{E}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}'_l \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{E}'_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}'_{i-1} \otimes \mathcal{E}_i \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_l \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_l.$$

□

We deduce from this proposition and the previous one the existence of a filtration F_2 on $\mathcal{Q}_{k,m}$, whose graded module can be written

$$\mathrm{Gr}^{F_2}_{\bullet}\left(\mathcal{Q}_{k,m}\right) = \bigoplus_{l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = m} \bigoplus_{i=1}^{k} S^{l_1}\Omega_{\overline{X}} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{l_i} \otimes \dots \otimes S^{l_k}\Omega_{\overline{X}}(\log D),$$

where $\mathcal{S}_l = S^l\Omega_{\overline{X}}(\log D) \big/ S^l\Omega_{\overline{X}}$.

The $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules $\mathcal{S}_l$ can be in turn filtered in $\mathcal{O}_D$-modules, using a filtration that was first introduced in [CP07]. For completeness, we will describe this filtration in our special case.

Proposition 3.6.3. *For any $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_l$ is endowed with a filtration, whose graded terms are $\mathcal{O}_D$-modules, written*

$$\mathrm{Gr}_{\bullet}(\mathcal{S}_l) = \bigoplus_{j=0}^{l} \bigoplus_{s=0}^{j} \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes s} \otimes S^{l-j}\Omega_D.$$

Proof. As we see in [Mok12] (cf. Chapter 2, Section 2.3.1), each boundary component T_b admits a tubular neighborhood U, quotient of its universal cover $\widehat{U} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ by a lattice $\Lambda \subset \mathbb{C}^{n-1}$. The component T_b can be identified to the quotient of $\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ by Λ. Let $D^\circ = \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\} \subset \widehat{U}$. The elements $a \in \Lambda$ act on $\Omega_{\widehat{U}}(\log D^0)$ in the following way :

$$\begin{cases} a \cdot \frac{dz_n}{z_n} = \frac{dz_n}{z_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(a) dz_i; \\ a \cdot dz_i = dz_i \text{ if } 1 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

where the $\gamma_i : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ are $\mathbb{R}$-linear maps. Consequently, the natural filtration by the degree of $\frac{dz_n}{z_n}$ in $S^l\Omega_{\widehat{U}}(\log D^\circ)$ is preserved by Λ, and induces a filtration G_l on $S^l\Omega_U(\log D))$ whose graded terms are globally trivial and can be written

$$\mathrm{Gr}^{G_l}_j\left(S^l\Omega_U(\log D)\right) = \left[\left(\frac{dz_n}{z_n}\right)^j\right] \cdot S^{l-j}\Omega_D.$$

This expression in local coordinates shows that the induced filtration by G_l on $S^l\Omega_U$ admits as general graded term

$$\mathrm{Gr}^{G_l \cap S_l \Omega_U}_j\left(S^l\Omega_U\right) = \mathcal{I}_{jD} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left[\left(\frac{dz_n}{z_n}\right)^j\right] \cdot S^{l-j}\Omega_D,$$

where $\mathcal{I}_{jD}$ is the sheaf of ideals of the divisor jD. Consequently, G_l induces a new filtration on the quotient $S^l\Omega_U(\log D) \big/ S^l\Omega_U$, whose graded terms are

$$\mathrm{Gr}_{\bullet}(\mathcal{S}_l) = \mathcal{O}_{jD} \otimes_{\mathcal{O}_U} S^{l-j}\Omega_D.$$

To obtain the proposition, it suffices to refine this last filtration, remarking that $\mathcal{O}_{jD} = \mathcal{O}_{\overline{X}} \big/ \mathcal{I}_{jD}$ is itself filtered by

$$0 \subset \mathcal{I}_{(j-1)D} \big/ \mathcal{I}_{jD} \subset \ldots \subset \mathcal{I}_{lD} \big/ \mathcal{I}_{jD} \subset \ldots \subset \mathcal{O}_{jD},$$

whose successive quotients can be identified to $\mathcal{I}_{lD} \big/ \mathcal{I}_{(l+1)D} \simeq \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes l}$. □

We can consequently refine the filtration F_2, to obtain a new one F_3, whose graded module is

$$\begin{aligned} &\mathrm{Gr}^{F_3}_\bullet(\mathcal{Q}_{k,m}) = \\ &\bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=m} \bigoplus_{j_i=0}^{l_i} \bigoplus_{s_i=0}^{j_i} \left(S^{l_1}\Omega_{\overline{X}} \otimes \ldots \otimes S^{l_{i-1}}\Omega_{\overline{X}}\right. \\ &\qquad \left. \otimes \left[\left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes s_i} \otimes S^{l_i-j_i}\Omega_D\right] \otimes S^{l_{i+1}}\Omega_{\overline{X}}(\log D) \otimes \ldots \otimes S^{l_k}\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right). \end{aligned}$$

Each one of the terms of this direct sum can be seen as an $\mathcal{O}_D$-module. Besides, we have seen in the proof of Proposition 3.6.3 that $S^l\Omega_{\overline{X}}(\log D)|_D$ admits a natural filtration whose graded terms are trivial :

$$\mathrm{Gr}_\bullet\left(S^l\Omega_{\overline{X}}(\log D)\right) = \bigoplus_{j=0}^{l} S^j\Omega_D.$$

On the other hand, since each boundary component admit a tubular neighborhood, we have

$$\Omega_{\overline{X}}|_D = N^*_{D/\overline{X}} \oplus \Omega_D,$$

so $S^l\Omega_{\overline{X}}|_D \simeq \bigoplus_{j=0}^{l}\left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^j \otimes S^{l-j}\Omega_D$. We can consequently refine a last time the filtration on $\mathcal{Q}_{k,m}$, to obtain the following proposition.

Proposition 3.6.4. *For any $k, m \in \mathbb{N}^*$, there exists a filtration $F_\bullet\mathcal{Q}_{k,m}$, whose graded module is an $\mathcal{O}_D$-module written*

$$\mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{Q}_{k,m}) = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=m} \bigoplus_{j_1=0}^{l_i} \ldots \bigoplus_{j_k=0}^{l_k} \bigoplus_{s_i=0}^{j_i} \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)} \otimes S^{l_1-j_1}\Omega_D \otimes \ldots \otimes S^{l_k-j_k}\Omega_D. \tag{3.20}$$

where all tensor products are taken over $\mathcal{O}_D$.

3.6.2 Upper bound on the graded terms of the filtration

We want to obtain an asymptotic upper bound on $h^0\left(D, \mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{Q}_{k,m})\right)$ when $m \longrightarrow 0$. We start by changing the indexing of the direct sums, so that we sum over $r = j_1 + 2j_2 + \ldots + kj_k$. If we proceed to the substitution $l_i \leftarrow l_i - j_i$, we find :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{Q}_{k,m}) = \bigoplus_{r=0}^{m} \Bigg(\Bigg[\bigoplus_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=r} \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{s_i=0}^{j_i} \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)} \Bigg] \\ \otimes \Bigg[\bigoplus_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=m-r} S^{l_1}\Omega_D \otimes \ldots \otimes S^{l_k}\Omega_D \Bigg] \Bigg) \end{aligned}$$

The term on the right is a trivial vector bundle, because D is made of disjoint abelian varieties.

Consequently, we have

$$h^0\left(D, \mathrm{Gr}^F_\bullet\left(\mathcal{Q}_{k,m}\right)\right) = \sum_{r=0}^{m}\left(\left[\sum_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=r}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s_i=0}^{j_i} h^0\left(D, \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)}\right)\right] \cdot \mathrm{rk}\left[\bigoplus_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=m-r} S^{l_1}\Omega_D\otimes\ldots\otimes S^{l_k}\Omega_D\right]\right). \tag{3.21}$$

For a fixed $(j_1,\ldots,j_k)$, we will now compute $\sum_{i=1}^{k}\sum_{s_i=0}^{j_i} h^0\left(D, \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)}\right)$.

Recall that the line bundle $N^*_{D/\overline{X}}$ is ample (cf. [Mok12]). Consequently, since the boundary is made of abelian varieties, Kodaira vanishing theorem yields

$$\chi(D,(N^*_{D/\overline{X}})^{\otimes(j_1+j_2+\ldots+s_i)}) = h^0(D,(N^*_{D/\overline{X}})^{\otimes(j_1+j_2+\ldots+s_i)}),$$

as soon as $j_1+j_2+\ldots+s_i\neq 0$.

Besides, still because the boundary is a union of abelian varieties, Hirzebruch-Riemann-Roch theorem gives

$$\chi(D,(N^*_{D/\overline{X}})^{\otimes(j_1+j_2+\ldots j_{i-1}+s_i)}) = \frac{1}{(n-1)!}(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)^{n-1}\left[-(-D)^n\right].$$

We can sum this last term on s_i, to find

$$\begin{aligned}
\sum_{s_i=0}^{j_i}(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)^{n-1} &= \sum_{l_1+\ldots+l_i=n-1}\binom{n-1}{l_1,\ \ldots,\ l_i} j_1^{l_1}\ldots j_{i-1}^{l_{i-1}}\sum_{s_i=0}^{j_i} s_i^{l_i}\\
&= \sum_{l_1+\ldots+l_i=n-1}\binom{n-1}{l_1,\ \ldots,\ l_i} j_1^{l_1}\ldots j_{i-1}^{l_{i-1}}\left[\frac{j_i^{l_i+1}}{l_i+1}+O(j_i^{l_i-1})\right]\\
&= \sum_{l_1+\ldots+(l_i+1)=n}\frac{1}{n}\binom{n}{l_1\ \ldots,\ l_i+1} j_1^{l_1}\ldots j_i^{l_i+1} + O\left(\sum_{l_1+\ldots+l_i=n-1}\binom{n-1}{l_1,\ \ldots,\ l_i} j_1^{l_1}\ldots j_i^{l_i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left[(j_1+\ldots+j_i)^n-(j_1+\ldots+j_{i-1})^n\right]+O((j_1+\ldots+j_i)^{n-1}),
\end{aligned}$$

where we use the multinomial formula at the second and fourth lines.

If we sum over i, and using the fact that for a fixed i, there is only one term for which $j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i = 0$, we finally find

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{s_i=0}^{j_i} h^0\left(D, \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)}\right) = \frac{1}{n!}(j_1+\ldots+j_n)^n\frac{\left[-(-D)^n\right]}{n!}+O\left(\sum_i (j_1+\ldots+j_i)^{n-1}\right). \tag{3.22}$$

3.6.3 Final asymptotic estimate over $h^0(\mathcal{Q}_{k,m})$ as $m\longrightarrow+\infty$.

Applying Proposition 3.3.8, we can sum (3.22) over the $j_1,\ldots,j_k$ such that $j_1+2j_2+\ldots+kj_k=r$, to find

$$\sum_{j_1+2j_2+\ldots+kj_k=r}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s_i=0}^{j_i} h^0\left(D, \left(N^*_{D/\overline{X}}\right)^{\otimes(j_1+\ldots+j_{i-1}+s_i)}\right) \leq \frac{r^{n+k-1}}{(n+k-1)}\left[\frac{1}{k!}\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_n\leq k}\frac{1}{i_1\ldots i_n}\right]\left[-(-D)^n\right]+O(r^{n+k-2}).$$

Moreover, according to Proposition 3.3.9, we have

$$\operatorname{rk}\left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=r} S^{l_1}\Omega_D\otimes\ldots\otimes S^{l_k}\Omega_D\right)=\frac{1}{(k!)^{n-1}}\frac{m^{(n-1)k-1}}{((n-1)k-1)!}+O(m^{nk-2}).$$

If we put these two asymptotic expressions in (3.21), we obtain the following final estimate on $h^0(\mathcal{Q}_{k,m})$, when $m\longrightarrow+\infty$:

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{Q}_{k,m}) &\le h^0(\mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{Q}_{k,m}))\\
&\le \sum_{r=0}^{m}\left[\frac{r^{n+k-1}}{(n+k-1)}\left[\frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k}\frac{1}{i_1\ldots i_n}\right][-(-D)^n]\right]\cdot\left[\frac{1}{(k!)^{n-1}}\frac{(m-r)^{(n-1)k-1}}{((n-1)k-1)}\right]\\
&\qquad + O(m^{n+nk-2})\\
&= \frac{[-(-D)^n]}{(k!)^n}\left[\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k}\frac{1}{i_1\ldots i_k}\right]\frac{m^{n+nk-1}}{(n+nk-1)!}+O(m^{n+nk-2}). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

3.6.4 Uniform lower bound in k on $\operatorname{vol}(E^{GG}_{k,m}\Omega_{\overline{X}})$

Combining (3.18) with (3.15) and (3.23), we finally obtain the lower bound (3.4) on $\operatorname{vol}(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}})$, which proves Theorem 3.1.3. The expression (3.4) being valid for any k, we can use the results of [BT15] to determine an order k after which the algebra $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$ has maximal growth.

For example, it is not hard to obtain an asymptotic expansion of (3.4), with leading coefficient

$$\frac{1}{n!(k!)^n}(\log k)^n\left((K_{\overline{X}}+D)^n+(-D)^n\right)=\frac{1}{n!(k!)^n}(\log k)^k(K_{\overline{X}})^n.$$

In this computation, we used the isomorphism $\left.\left(K_{\overline{X}}+D\right)\right|_D\cong\mathcal{O}_D$; this is true because $K_{\overline{X}}+D$ is the pull-back of the canonical divisor of the Baily-Borel compactification, where each boundary component of D is contracted to a point.

When $K_{\overline{X}}$ is nef and big (this is true when $n\ge 4$, by [CC15a] and [BT15]), we get back the asymptotic lower bound of [Dem11].

$$\operatorname{vol}(E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}})\ge\frac{(\log k)^n}{n!(k!)^n}\left(\operatorname{vol}(K_{\overline{X}})+O((\log k)^{-1})\right).$$

3.6.5 Explicit orders k to have a big $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$

In this section, we will use effective bounds on the combinatorial estimates of Theorem 3.1.3, to prove Theorem 3.1.4. We will use (3.4) to determine an effective k after which $E^{GG}_{k,\bullet}\Omega_{\overline{X}}$ is big. Let us begin by determining an upper bound on $\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k}\frac{1}{i_1\ldots i_n}$. We have

$$\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k}\frac{1}{i_1\ldots i_k}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_p=n\\ \forall i,\, l_i>0}}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_p\le k}\frac{1}{j_1^{l_1}\ldots j_p^{l_p}},$$

the datum of n integers $1\le i_1\le\ldots\le i_n\le k$ in non-decreasing order being equivalent to the one of an integer p giving the number of distinct i_j, of p integers $1\le j_1<\ldots<j_p\le k$, and of positive exponents

$l_1, ..., l_p$ such that $\sum_k l_k = n$. Now, for any $p \geq 1$, we have :

$$\sum_{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n} \frac{1}{j_1 ... j_p} \leq \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_p \leq k} \frac{1}{j_1 ... j_p}$$
$$= \frac{1}{p!} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right]^p$$
$$\leq \frac{1}{p!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^p .$$

Let $p \leq n-1$, and choose $l_1, ..., l_p$ such that $l_1 + ... + l_p = n$ and $l_i \neq 0$ for any i. Necessarily, at least one l_i is larger than 2, so

$$\sum_{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n} \frac{1}{j_1^{l_1} ... j_p^{l_p}} \leq \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_{p-1} \leq n} \sum_{1 \leq j_p \leq n} \frac{1}{j_1 ... j_{p-1} j_p^2}$$
$$\leq \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_{p-1} \leq n} \frac{1}{j_1 ... j_{p-1}} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$
$$\leq \frac{1}{(p-1)!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^{p-1} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Thus,

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_n \leq k} \frac{1}{i_1 ... i_k} \leq \frac{1}{n!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^n + \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{\substack{l_1 + ... + l_p = n \\ \forall i,\, l_i > 0}} 1 \right) \cdot \frac{1}{(p-1)!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^{p-1} .$$

It is easy to see that $\sum_{\substack{l_1 + ... + l_p = n \\ \forall i,\, l_i > 0}} 1 = \binom{n-1}{p-1}$ (choosing the integers l_i amounts to choosing $p-1$ cuts in the set $[\![1, n]\!]$, i.e. among $n-1$ possible cuts). Consequently, we find

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_n \leq k} \frac{1}{i_1 \, ... \, i_n} \leq \frac{\left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^n}{n!} + \frac{\pi^2}{6} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p-1} \frac{1}{(p-1)!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^{p-1} .$$

We can use the following upper bound :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p-1} \frac{1}{(p-1)!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-1}{p} \frac{1}{p!} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^p$$
$$\leq \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-1}{p} \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^p$$
$$= \left(\log k + \gamma + \frac{3}{2} \right)^{n-1} - \left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$
$$\leq (n-2) \left(\log k + \gamma + \frac{3}{2} \right)^{n-2} ,$$

where we used the mean value inequality in the last line. Thus,

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_n \leq k} \frac{1}{i_1 \, ... \, i_n} \leq \frac{\left(\log k + \gamma + \frac{1}{2} \right)^n}{n!} + \frac{\pi^2}{6} (n-2) \left(\log k + \gamma + \frac{3}{2} \right)^{n-2} . \tag{3.24}$$

Inserting (3.16) and (3.24), in (3.4), we find a lower bound of the form

$$\mathrm{vol}\left(E_{k,\bullet} \Omega_{\overline{X}} \right) \geq C_k \left[\left(K_{\overline{X}} + D \right)^n + A(k,n)(-D)^n \right]$$

for a certain $C_k \in \mathbb{R}^*$, and

$$A(k,n) = \left[\frac{\log k + \gamma + \frac{1}{2}}{\log k + \gamma}\right]^n + (n-2)n!\frac{\pi^2}{6}\frac{\left(\log k + \gamma + \frac{3}{2}\right)^{n-2}}{\left(\log k + \gamma\right)^n}$$

Let us first deal with the case where $n \geq 6$. According to [BT15], we have $\left(K_{\overline{X}} + D\right)^n + \alpha(-D)^n > 0$ for all $\alpha \in \left]0, \left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^n\right[$. The only thing left now is to determine an integer k such that $A(k,n) < \left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^n$.
Let $j = \log k + \gamma$. We have

$$\begin{aligned} A(k,n) &= \left(1 + \frac{1}{2j}\right)^n + \frac{\pi^2}{6}\frac{(n-2)n!}{j}\left(1 + \frac{3}{2j}\right)^{n-2} \\ &\leq \left(1 + \frac{3}{2j}\right)^{n-2}\left((1 + \frac{1}{2j})^2 + \frac{\pi^2}{6}\frac{(n-2)n!}{j}\right). \end{aligned}$$

We see that if $j > \frac{\frac{\pi^2}{6}(n-2)n!+1}{\frac{n+1}{2\pi}-1}$, then $A(k,n) < \left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^n$.

Besides, if $n \in [\![4,5]\!]$, then $(K_{\overline{X}})^n = \left(K_{\overline{X}} + D\right)^n + (-D)^n > 0$. Consequently, since $(K_{\overline{X}})^n$ is an integer, $(K_{\overline{X}} + D)^n + (-D)^n \geq 1$, and

$$(K_{\overline{X}} + D)^n + \lambda(-D)^n > 0$$

for any $\lambda \in]0, 1 + \frac{1}{-(-D)^n}[$. Thus, $\mathrm{vol}(E_{k,\bullet}\Omega_X) > 0$ as soon as $A(k,n) < 1 + \frac{1}{(-D)^n}$. Performing the same computations as before, we see that it is true if

$$\log k + \gamma > -(-D)^n\left((n-2)n! + 1\right).$$

We have consequently proved Theorem 3.1.4.

Chapitre 4

Hyperbolicité de quotients de domaines symétriques bornés quelconques

4.1 Introduction

On va maintenant montrer comment on peut appliquer les méthodes métriques introduites dans les chapitres précédents pour donner des démonstrations simples de résultats d'hyperbolicité algébrique et transcendante, concernant les compactifications toroïdales de quotients de domaines symétriques bornés quelconques. En particulier, on va présenter un traitement unifié des hyperbolicités algébrique et de Kobayashi sur ces variétés, qui permet de retrouver et améliorer les théorèmes principaux de [Bru16a] et [Rou15], obtenus respectivement par Brunebarbe et Rousseau.

La méthode que l'on va présenter permet en principe d'obtenir des résultats effectifs pour tout domaine symétrique borné, moyennant le calcul de certaines constantes numériques ; on présentera certains de ces résultats effectifs dans le cas de la boule et des espaces de modules $\mathcal{A}_g(n)$.

Avant d'énoncer les résultats, on commence par procéder à quelques rappels sur la notion de p-mesure hyperbolicité, que l'on pourra trouver avec plus de détails dans [Dem12].

Sur toute variété complexe X, on peut définir des métriques infinitésimales intrinsèques, dont les propriétés sont reliées à l'hyperbolicité de X. En particulier, on peut définir la pseudo-métrique de Kobayashi-Eisenman de la façon suivante.

Définition 4.1.1. Soit X une variété complexe, et soit $\xi = v_1 \wedge ... \wedge v_p$ un p-vecteur totalement décomposé, basé en un certain point $x \in X$. La *pseudo-métrique de Kobayashi-Eisenman* est la pseudo-métrique qui à ξ associe le nombre réel

$$\mathbf{e}^p(\xi) = \inf\{\lambda > 0; \exists f : \mathbb{B}_p \longrightarrow X,\ f(0) = x, \lambda f_*(\tau_p) = \xi\},$$

où $\tau_p = e_1 \wedge ... \wedge e_p \in \bigwedge^p T_{\mathbb{B}^p,0}$ est le p-vecteur standard basé en $0 \in \mathbb{B}^p$.

On peut maintenant former la notion de p-mesure hyperbolicité forte, de la façon suivante.

Définition 4.1.2. On dit qu'une variété complexe X est *infinitésimalement p-mesure hyperbolique* modulo un sous-ensemble Z s'il existe une fonction continue et strictement positive v sur l'espace des p-vecteurs décomposés sur $X \smallsetminus Z$ tel que

$$\mathbf{e}^p(\xi) \geq v(\xi)$$

pour tout tel p-vecteur ξ.

Une définition plus faible de p-mesure hyperbolicité aurait été de demander que l'on puisse séparer tous les couples de points qui ne sont pas inclus dans Z, en appliquant la métrique de Kobayashi-Eisenman à des chaînes de boules $\mathbb{B}^p \longrightarrow \overline{X}$.

4.1.1 Énoncé des résultats

On considère maintenant un domaine symétrique borné Ω de dimension n, un réseau arithmétique net $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$. Soit $X = \Gamma \backslash \Omega$, et soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale lisse de X comme construite dans [AMRT10], avec bord D. On normalise la métrique de Bergman sur Ω de sorte que $\mathrm{Ric}(h_{\mathrm{Berg}}) = -\omega_{\mathrm{Berg}}$, et on introduit une constante $\eta > 0$ de sorte que $-\eta$ soit le maximum de la courbure sectionnelle holomorphe sur Ω.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 4.1.3. *Il existe une suite de constantes $\eta = C_1 \leq C_2 ... \leq C_n = 1$, ne dépendant que de Ω, telles que le résultat suivant soit vérifié.*

On suppose qu'il existe un nombre rationnel $\alpha > \frac{1}{C_p}$ tel que $L = K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D$ soit un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif. Alors,

(i) Toute sous-variété $V \subset \overline{X}$, telle que $V \not\subset \mathbb{B}(L) \cup D$, et $\dim V \geq p$, est de type général. Plus précisément, pour toute telle sous-variété V, et toute résolution des singularités $\widetilde{V} \longrightarrow V$, on a

$$\mathrm{vol}(K_{\widetilde{V}}) \geq \left(\frac{C_p - \frac{1}{\alpha}}{2\pi} \right)^{\dim V} \int_V \omega_{\mathrm{Berg}}^{\dim V}$$

.

(ii) $\overline{X}$ est infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo $\mathbb{B}(L) \cup D$.

En particulier, toute application génériquement immersive $f : \mathbb{C}^p \longrightarrow \overline{X}$ a son image dans $\mathbb{B}(L) \cup D$.

Ici, $\mathbb{B}(L) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Bs}\left(L^{\otimes m}\right)$ désigne le lieu de base stable de L.

En utilisant le théorème 4.1.3, on peut donner une preuve très simple du résultat fort d'hyperbolicité suivant. Sa partie algébrique est une version effective du résultat principal de [Bru16a], tandis que sa partie transcendante, concernant la métrique de Kobayashi, a été prouvée dans [Rou15].

Théorème 4.1.4. *Soit $\lambda = \frac{1}{\eta}\left(\binom{n+1}{2} + 2\right)$. Soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$, un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres strictement supérieurs à λ sur chaque composante de bord. Alors $\overline{X'}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi modulo son bord D', et toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$, telle que $V \not\subset D'$, est de type général.*

On donnera plus loin une autre version de ce résultat, plus précise pour les sous-variétés de dimension minorée et pour la p-mesure hyperbolicité, une fois que l'on aura introduit quelques notations supplémentaires (voir le théorème 4.2.10). Pour le moment, mentionnons simplement la version suivante du théorème 4.1.3 dans le cas de la boule, basée sur les résultats de [BT15].

Théorème 4.1.5. *Supposons que $\Omega = \mathbb{B}^n$. Soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres supérieurs à un certain entier l au-dessus du bord. Soit $p = \lceil \frac{2\pi}{l} \rceil - 1$. Alors $\overline{X'}$ est infinitésimalement p-mesure hyperbolique modulo D', et toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$ avec $\dim V \geq p$ et $V \not\subset D'$, est du type général.*

En particulier, en prenant $l = 1$, on obtient le résultat frappant suivant.

Corollaire 4.1.6. *Soit $\overline{X}$ une compactification toroïdale minimale d'un quotient de la boule. Toute sous-variété $V \subset \overline{X}$ telle que $\dim V \geq 6$ et $V \not\subset D$ est du type général.*

On s'intéresse maintenant au cas des espaces de modules $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$, qui paramètrent les familles principalement polarisées de variétés abéliennes de dimension g avec une structure de niveau n. En appliquant le théorème 4.1.3, on obtient le résultat suivant, qui améliore un théorème de [Bru16a] :

Théorème 4.1.7. *Soit $n > 6g$, et soit $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$ une compactification toroïdale de $\mathcal{A}_g(n)$, avec bord D. Alors $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi modulo D, et toute sous-variété $V \subset \overline{\mathcal{A}_g(n)}$ avec $V \not\subset D$, est de type général.*

L'affirmation concernant la métrique de Kobayashi a d'abord été prouvée dans [Rou15]. Si l'on s'intéresse à l'hyperbolicité modulo un sous-ensemble différent de D, on peut alors prendre une borne inférieure uniforme pour n, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.1.8. *Soit $n \geq 54$. Alors il existe un sous-ensemble analytique propre $Z \subsetneq \overline{\mathcal{A}_g(n)}$, tel que $\overline{\mathcal{A}_g(n)}$ est Kobayashi hyperbolique modulo $Z \cup D$, et tel que toute sous-variété $V \subset \overline{\mathcal{A}_g(n)}$, avec $V \not\subset D \cup Z$, est de type général.*

4.2 Preuves

Avant de pouvoir prouver les résultats mentionnés précédemment, on doit introduire un certain nombre de notations.

4.2.1 Bornes sur la courbure de Ricci

On commence par définir les constantes qui ont été introduites dans le théorème 4.1.3.

Fixons un entier $p \in [\![1, n]\!]$. Soit $x \in \Omega$ et soit v un vecteur tangent non-nul en x. Puisque la courbure bisectionnelle sur Ω est négative, on en déduit que pour tout espace vectoriel $V \subset T_{x,\Omega}$ contenant v, on a

$$\mathrm{Tr}^V_{h_{\mathrm{Berg}}} i\, \Theta(h_{\mathrm{Berg}})|^V_V \cdot (v, v) = i \sum_j \Theta(e_j, e_j, v, v) \leq -\eta \|v\|^2,$$

où $\mathrm{Tr}^V_{h_{\mathrm{Berg}}}$ désigne la trace sur V par rapport à la métrique h_{Berg}. Ici, $(e_j)_j$ est un repère unitaire quelconque de V pour la métrique h_{Berg}. On peut prendre par exemple $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$, ce qui donne facilement la dernière inégalité.

Pour tout p, on peut maintenant définir une constante $C_{x,v,p}$, de la manière suivante :

$$C_{x,v,p} = - \sup_{V \ni v, \dim V = p} \frac{\mathrm{Tr}^V_{h_{\mathrm{Berg}}} i\, \Theta(h_{\mathrm{Berg}})|^V_V \cdot (v, v)}{\|v\|^2}.$$

D'après la discussion précédente, pour tout (x, v, p), on a : $C_{x,v,p} \geq \eta > 0$.

Définition 4.2.1. Pour tout p, on pose

$$C_p = \inf_{v \in T_{\Omega,x} \setminus \{0\}} C_{x,v,p}.$$

Puisque Ω est un espace homogène, on voit immédiatement que cette définition ne dépend pas de x. La propriété suivante se montre directement.

Proposition 4.2.2. *On a la suite d'inégalités*

$$\eta = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_n = 1.$$

La courbure bisectionnelle diminue sur les sous-variétés, donc on peut trouver une borne supérieure sur la courbure de Ricci de ces sous-variétés en fonction des constantes C_p.

Proposition 4.2.3. *Soit $(Y, 0) \subset (\Omega, 0)$ un germe de sous-variété de dimension p. Alors la restriction de la métrique de Bergman à Y a sa courbure de Ricci bornée comme*

$$\mathrm{Ric}\left(h_{\mathrm{Berg}}|_Y \right) \leq -C_p\, j^* \omega_{\mathrm{Berg}}.$$

où $j : Y \longrightarrow \Omega$ est l'application de plongement.

Preuve. Soit v un vecteur tangent à Y en 0, et soit $V = T_{Y,0}$. On a,par définition de la courbure de Ricci :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}\left(h_{\mathrm{Berg}}|_Y \right) \cdot (v,v) &= \operatorname{Tr}^V_{h_{\mathrm{Berg}}|_Y} i\,\Theta(h_{\mathrm{Berg}}|_Y)|^V_V \cdot (v,v) \\ &\leq \operatorname{Tr}^V_{h_{\mathrm{Berg}}} i\,\Theta(h_{\mathrm{Berg}})|^V_V \cdot (v,v) \\ &\leq -C_p \|v\|^2, \end{aligned}$$

où la première inégalité vient du fait que la courbure bisectionnelle diminue sur les sous-variétés. La dernière inégalité vient simplement de la définition de C_p. □

4.2.2 Pentes de diviseurs effectifs

On considère maintenant un réseau arithmétique net $\Gamma \subset \operatorname{Aut}(\Omega)$, et on considère une compactification toroïdale lisse et projective $\overline{X}$ du quotient $X = \Gamma \backslash \Omega$, avec bord D.

D'après [Mum77], on sait que le diviseur $K_{\overline{X}} + D$ est *big*. Puisque cette propriété est ouverte, pour tout α assez petit, $K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D$ est effectif. De fait, on peut introduire la définition suivante :

Définition 4.2.4. $\alpha_{\mathrm{eff}} = \sup\{\alpha > 0\ ;\ K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D \text{ est effectif }\}$

D'après ce qui vient d'être dit, on a $\alpha_{\mathrm{eff}} > 0$.

En outre, d'après le travail de Hwang et To [HT06, Proposition 4.2], il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que le lieu de base stable du $\mathbb{Q}$-diviseur $K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D$ soit inclus dans D. On pose alors

Définition 4.2.5. $\alpha_{\mathrm{base}} = \sup\left\{\alpha > 0\ ;\ \mathbb{B}\left(K_{\overline{X}} + (1-\alpha)D \right) \subset D\right\}$.

Il est en fait démontré dans [HT06, Proposition 4.2] que $\alpha_{\mathrm{base}} \geq \frac{1}{\binom{n+1}{2}+2}$ en général. Pour certaines compactifications toroïdales particulières, on a des meilleurs bornes que celles-ci pour α_{base} et α_{eff}.

Proposition 4.2.6 (Bakker-Tsimerman [BT15])**.** *Si $\Omega = \mathbb{B}^n$, on a $\alpha_{\mathrm{eff}} \geq \alpha_{\mathrm{base}} \geq \frac{n+1}{2\pi}$.*

En fait, par le théorème 0.2.4, pour tout $\lambda \in \left]0, \frac{n+1}{2\pi}\right[$, le diviseur $K_{\overline{X}} + (1-\lambda)D$ est ample.

Par ailleurs, l'espace de modules $\overline{\mathcal{A}_g}$ est une compactification toroïdale particulière du demi-espace de Siegel $\mathbb{H}_g$, et dans ce cadre, on a aussi des bornes inférieures effectives pour α_{base} et α_{eff}, obtenues respectivement par Weissauer et Grushevsky.

Proposition 4.2.7 (Weissauer [Wei86])**.** *Si $\overline{X} = \overline{\mathcal{A}_g}$, on a $\alpha_{\mathrm{base}} \geq \frac{g+1}{12}$.*

Proposition 4.2.8 (Grushevsky [Gru09])**.** *Si $\overline{X} = \overline{\mathcal{A}_g}$, on a*

$$\alpha_{\mathrm{eff}} \geq \frac{(g+1)\,(2g!\,\zeta(2g))^{\frac{1}{g}}}{(2\pi)^2}.$$

4.2.3 Preuve des résultats principaux

On reprend les notations et définitions des sections 4.2.1 et 4.2.2. Tous les résultats mentionnés dans la section 4.1.1 seront des conséquences du théorème 4.1.3, que l'on va à présent démontrer.

Preuve du théorème 4.1.3. On commence par démontrer la première assertion. Soit $V \subset \overline{X}$ une sous-variété de dimension $q \geq p$, telle que $V \not\subset \mathbb{B}(L) \cup D$. Alors, par hypothèse, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une section $s \in H^0\left(\overline{X}, \mathcal{O}(m(K_{\overline{X}} + D) - m\alpha D)\right)$, telle que $s|_V$ ne soit pas identiquement nulle.

Soit $\widetilde{V} \xrightarrow{j} V \subset \overline{X}$ une résolution des singularités de V. Puisque le volume de $K_{\widetilde{V}}$ ne change pas quand on procède à des éclatements de centres lisses, on peut supposer que $j^{-1}(D)$ est à croisements normaux. Puisque $\alpha > \frac{1}{C_p}$, on peut trouver un nombre réel $\beta \in \left]\frac{1}{\alpha m}, \frac{C_p}{m}\right[$. On définit alors une métrique singulière $\widetilde{h}$ sur $K^*_{\widetilde{V}}$, de la façon suivante :

$$\widetilde{h} = \|s\|^{2\beta}\det(j^* h_{\mathrm{Berg}}), \tag{4.1}$$

où la norme $\|\cdot\|$ est induite par h_{Berg} sur $\mathcal{O}(m(K_{\overline{X}} + D))$. En particulier, s est vue comme une section s'annulant à l'ordre $m\alpha$ le long de D. On montre d'abord que $\widetilde{h}^*$ a courbure positive au sens des courants sur $K_{\overline{V}}$.

On commence par montrer que $\widetilde{h}$ est partout localement bornée sur $\widetilde{V}$. Pour ce faire, on montre d'abord que $j^{-1}(h_{\mathrm{Berg}})$ a croissance de Poincaré près de $j^{-1}(D)$. Puisque la courbure sectionnelle holomorphe diminue sur les sous-variétés, la métrique $j^{-1}(h_{\mathrm{Berg}})$ est lisse sur $\widetilde{V} \setminus j^{-1}(V_{\mathrm{sing}})$, à courbure sectionnelle holomorphe négative majorée par $-\eta$. Par ailleurs, $j^{-1}(\widetilde{h})$ est une métrique *continue* sur $\widetilde{V} \setminus j^{-1}(D)$. Ainsi, au voisinage de $j^{-1}(D)$, les trois hypothèses de la proposition 1.2.3 sont satisfaites, ce qui montre que $\widetilde{h}$ est à croissance de Poincaré au voisinage de $j^{-1}(D)$. Par conséquent, si w est une équation locale pour $j^{-1}(D)_{\mathrm{red}}$, on a, dans un repère local de $K^*_{\widetilde{V}}$:

$$\det(j^* h_{\mathrm{Berg}}) \leq C \frac{1}{|w|^2}.$$

Rappelons que s s'annule à l'ordre $m\alpha$ le long de D, et que la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{O}(m(K_{\overline{X}}+D))$, induite par h_{Berg}, a croissance logarithmique le long de D, par [Mum77]. Par conséquent, on voit par la définition (4.1) que puisque $\beta m\alpha > 1$, la métrique $\widetilde{h}$ est partout localement bornée.

Par ailleurs, la courbure de $\widetilde{h}$ en chaque point de $V_{\mathrm{reg}} \setminus D$ peut se borner comme :

$$\begin{aligned} i\Theta(\widetilde{h})(v,v) &= i\beta j^*\Theta\left(\left(\det h^*_{\mathrm{Berg}}\right)^m\right)(v,v) + i\Theta(\det(j^* h_{\mathrm{Berg}}))(v,v) \\ &= \left[-\beta m\, j^*\mathrm{Ric}(h_{\mathrm{Berg}}) + \mathrm{Ric}(j^* h_{\mathrm{Berg}})\right](v,v) \\ &\leq (\beta m - C_q)\,\|v\|^2 \\ &\leq (\beta m - C_p)\,\|v\|^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

où à la troisième ligne on a utilisé la proposition 4.2.3, et notre hypothèse de normalisation sur h_{Berg}, tandis qu'à la quatrième ligne on a utilisé la proposition 4.2.2. De fait, puisque $\beta m < C_p$, la métrique $\widetilde{h}$ a courbure négative aux points où elle est lisse.

Ainsi, on a obtenu une métrique singulière $\widetilde{h}$ sur $K^*_{\widetilde{V}}$, localement bornée partout sur $\widetilde{V}$, et de courbure négative en dehors du diviseur $j^{-1}(D \cup V_{\mathrm{sing}})$. Par le théorème usuel d'extension des fonctions plurisousharmoniques, on voit que $\widetilde{h}^*$ a courbure positive au sens des courants, et en utilisant le théorème 0.4.1, on peut borner inférieurement $\mathrm{vol}(K_{\overline{X}})$ comme

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(K_{\overline{X}}) &\geq \int_{\widetilde{V}} \left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widetilde{h}^*)^{ac}\right)^p \\ &= \int_{V_{\mathrm{reg}} \setminus (D \cup \{s=0\})} \left(\frac{i}{2\pi}\Theta(\widetilde{h}^*)\right)^p. \end{aligned}$$

où $i\Theta(\widetilde{h}^*)^{ac}$ désigne la partie absolument continue du courant positif $i\Theta(\widetilde{h}^*)$.

Maintenant, par l'inégalité (4.2), ceci implique que

$$\mathrm{vol}\left(K_{\widetilde{V}}\right) \geq \left(\frac{C_p - \beta m}{2\pi}\right)^q \int_{V_{\mathrm{reg}} \setminus (D \cup \{s=0\})} \omega^q_{\mathrm{Berg}},$$

et, en faisant tendre β vers $\frac{1}{\alpha m}$, on obtient

$$\mathrm{vol}(K_{\widetilde{V}}) \geq \left(\frac{C_p - \frac{1}{\alpha}}{2\pi}\right)^q \int_{V_{\mathrm{reg}} \setminus D} \omega^q_{\mathrm{Berg}},$$

ce qui montre la première assertion.

On montre maintenant la seconde assertion. Soit $x \in \overline{X} \smallsetminus (D \cup \mathbb{B}(L))$, et soit ξ un p-vecteur décomposé non nul basé en x. On considère une application holomorphe $f : \mathbb{B}^p \longrightarrow \overline{X}$ et un nombre réel $\lambda > 0$, tel que $\lambda f_*(\tau_0) = \xi$.

Alors, puisque $x \notin \mathbb{B}(L)$ on peut, comme précédemment, trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ et une section s de $\mathcal{O}(m(K_{\overline{X}} + D))$, s'annulant à l'ordre $m\alpha$ le long de D, telle que $s(x) \neq 0$.

Maintenant, on choisit un nombre réel β comme précédemment, et on définit la métrique singulière

$$h_0 = \|s\|^{\frac{2\beta}{p}} j^* h_{\mathrm{Berg}} \tag{4.3}$$

sur $\mathbb{B}^p$. Par les mêmes calculs que ci-dessus, on voit que $\widetilde{h} = \det(h_0)$ est localement borné partout sur $\mathbb{B}^p$. De plus, $\widetilde{h}^*$ a courbure positive aux points où elle est lisse, de sorte que $i\partial\overline{\partial}\log\det h_0 = i\Theta(\widetilde{h}^*) \geq \epsilon j^*\omega_{\mathrm{Berg}}$, avec $\epsilon = C_p - \beta m$. De fait, si l'on choisit une constante $C > \sup_{\overline{X}} \|s\|^{\frac{2\beta}{q}}$, le théorème d'extension des fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement implique que $i\partial\overline{\partial}\log\det h_0 \geq \frac{\epsilon}{C}\omega_{h_0}$ au sens des courants.

On peut alors appliquer la version suivante du lemme d'Ahlfors-Schwarz, valable pour les boules complexes de dimension supérieure.

Lemme 4.2.9 (lemme d'Ahlfors-Schwarz en dimension supérieure, cf. [Dem12, lemme 3.2])**.** *Soit $\omega = i\sum_{j,k}\omega_{j,k}dt_j \wedge d\overline{t}_k$ une forme hermitienne positive définie presque partout sur $\mathbb{B}^p$, telle que l'on ait $i\partial\overline{\partial}\log\det\omega \geq A\,\omega$ au sens des courants, pour une certaine constante $A > 0$. Alors la forme volume de ω est majorée par la forme volume de Poincaré sur $\mathbb{B}^p$:*

$$\det(\omega) \leq \left(\frac{p+1}{A}\right)^p \frac{1}{(1-|t|^2)^{p+1}}.$$

Ceci montre que

$$\det(\omega_0)(0) \leq \left(\frac{p+1}{\epsilon/C}\right)^p.$$

Cependant, d'après notre définition de h_0, on a $\det(\omega_0)(0) = \|s(x)\|^{2\beta}\frac{\|\xi\|^2_{\mathrm{Berg}}}{\lambda^2}$. Donc, $\lambda \geq C_0\|\xi\|_{\mathrm{Berg}}$, et ainsi $\mathbf{e}^p(\xi) \geq C_0\|\xi\|_{\mathrm{Berg}}$, avec $C_0 = \left(\frac{\epsilon/C}{p+1}\right)^{\frac{p}{2}}\|s(x)\|^{\beta}$. Il est clair que l'on peut choisir la même constante C_0 si x varie dans une petite boule ouverte ne rencontrant pas $\mathbb{B}(L) \cup D$. Ceci donne le résultat. □

On peut maintenant énoncer et démontrer la version plus précise suivante du théorème 4.1.4.

Théorème 4.2.10. *Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et soit $\overline{X'} \longrightarrow \overline{X}$ un revêtement ramifié, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres supérieurs à un certain entier l au-dessus de chaque composante de bord. Désignons par D' le bord de $\overline{X'}$. Alors, pour $l >> 1$, il existe un sous-ensemble algébrique $Z \subsetneq \overline{X'}$, tel que $\overline{X'}$ soit hyperbolique au sens de Kobayashi modulo Z, et tel que toute sous-variété $V \subset \overline{X'}$, avec $V \not\subset Z$, soit de type général. Plus précisément,*

(i) si $l > \frac{1}{\alpha_{\mathrm{eff}} C_p}$, on peut prendre $Z = Z' \cup D'$, pour un certain $Z' \subsetneq \overline{X'}$.

(ii) si $l > \frac{1}{\alpha_{\mathrm{base}} C_p}$, on peut prendre $Z = D'$.

Preuve. On va simplement prouver la première assertion, la deuxième pouvant se démontrer de manière similaire.

Sous l'hypothèse $l > \frac{1}{\alpha_{\mathrm{eff}} C_p}$, on peut choisir un nombre rationnel tel que $\beta > \frac{1}{C_p}$ et $\frac{\beta}{l} < \alpha_{\mathrm{eff}}$. Alors

$$K_{\overline{X'}} + (1-\beta)D' \geq \pi^*\left(K_{\overline{X}} + \left(1 - \frac{\beta}{l}\right)D\right),$$

où le symbole "≥" signifie que la différence entre les deux $\mathbb{Q}$-diviseurs est effective. Puisque $\frac{\beta}{l} < \alpha_{\mathrm{eff}}$, le diviseur de droite est effectif. De fait, le diviseur de gauche est aussi effectif, et puisque $\beta > \frac{1}{C_p}$ et $C_p \leq C_q$ pour tout $q \geq p$, le résultat s'ensuit par le théorème 4.1.3. □

Le théorème 4.1.4 est maintenant une conséquence directe du théorème 4.2.10 : il suffit d'utiliser le fait que $C_1 = \eta$, et que $\alpha_{\text{base}} \geq \binom{n+1}{2} + 2$ par [HT06]. Pour démontrer le théorème 4.1.5, il suffit de remarquer que dans le cas de la boule, $C_p = \frac{p+1}{n+1}$ par le lemme 4.2.11 suivant, et d'utiliser la proposition 4.2.6.

Lemme 4.2.11. *Si $\Omega = \mathbb{B}^n$, on a $C_p = \frac{p+1}{n+1}$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.*

Preuve. Sur $\mathbb{B}^n$ avec ses coordonnées usuelles $(z_1, \ldots, z_n)$, la métrique de Bergman, normalisée de façon à ce que $-\mathrm{Ric}(h_{\text{Berg}}) = \omega_{\text{Berg}}$, prend la forme

$$\omega_{\text{Berg}} = i(n+1)\ \frac{(1 - \|z\|^2)\sum_j dz_j \wedge d\overline{z_j} + \left(\sum_j \overline{z_j} dz_j\right) \wedge \left(\sum_j z_j d\overline{z_j}\right)}{(1 - \|z\|)^2}.$$

Soit $V \subset T_{\mathbb{B}^n, 0}$ un sous-espace de dimension p. En faisant agir $U(n)$ sur $\mathbb{B}^n$, on peut supposer que $V = \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_p}\right)$. Un calcul direct montre alors que

$$i\Theta(h_{\text{Berg}})_0 = i\overline{\partial}\partial h_{\text{Berg}}(0) = -i\left[\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge \overline{dz_j} \cdot \mathbb{I}_n + {}^t X \wedge \overline{X}\right],$$

où X est le vecteur ligne $(dz_1, \ldots, dz_n)$. En restriction à V, on trouve

$$\begin{aligned}
i\, j^* Tr_V \left[\Theta(h_{\text{Berg}})\right]_V^V &= -pj^*\left(i\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge \overline{dz_j}\right) + i\mathrm{Tr}\left({}^t X \wedge \overline{X}\right)\big|_V^V \\
&= -i(p+1)\sum_{j=1}^{p} dz_j \wedge \overline{dz_j} \\
&= -\frac{p+1}{n+1}\ \omega_{\text{Berg},0}\big|_V .
\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat, par définition de C_p. □

Finalement, les théorèmes 4.1.7 et 4.1.8 s'obtiennent facilement à partir des propositions 4.2.7 et 4.2.8.

Preuve des théorèmes 4.1.7 et 4.1.8. Dans le cas de $\mathcal{A}_g$ qui est un quotient du demi-plan de Siegel généralisé $\mathcal{H}_g$, on peut prendre $\eta = \frac{2}{g(g+1)}$. Alors, par la proposition 4.2.7, on a

$$\frac{1}{\alpha_{\text{base}}\eta} \leq \frac{12}{g+1}\,\frac{g(g+1)}{2} = 6g.$$

De même, par la proposition 4.2.8, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_{\text{eff}}\eta} &\leq \frac{(2\pi)^2}{(g+1)(2g!\,\zeta(2g))^{\frac{1}{g}}}\ \frac{g(g+1)}{2} \\
&\leq \frac{(2\pi)^2}{\left[2\sqrt{2\pi}g^{g+\frac{1}{2}}e^{-g}\right]^{\frac{1}{g}}}\,\frac{g}{2} \\
&\leq \frac{e(2\pi)^2}{2} < 54.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\zeta(2g) > 1$, ainsi que la minoration de Stirling $g! \geq \sqrt{2\pi}g^{g+\frac{1}{2}}e^{-g}$.

Puisque $\overline{\mathcal{A}_g(n)} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}_g}$ est un revêtement ramifiant à des ordres supérieurs à n sur chaque composante de bord, les deux résultats proviennent alors du théorème 4.2.10. □

Bibliographie

[AA97] A. Al-Amrani. Cohomological study of weighted projective spaces. In Sinan Sertoz, editor, *Algebraic Geometry*, volume 193 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. CRC Press, 1997.

[AMRT10] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y.-S. Tai. *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2010. With the collaboration of Peter Scholze.

[BB66] W. L. Baily and A. Borel. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Annals of Mathematics*, 84(3) :442–528, 1966.

[BC17] Y. Brunebarbe and B. Cadorel. Hyperbolicity of varieties supporting a variation of Hodge structure. *arXiv :1707.01327*, 2017.

[BCL14] S. Boucksom, S. Cacciola, and A. F. Lopez. Augmented base loci and restricted volumes on normal varieties. *Mathematische Zeitschrift*, 278(3) :979–985, Dec 2014.

[BG96] A. Braverman and D. Gaitsgory. Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type. *J. Algebra*, 181(2) :315–328, 1996.

[BKT13] Y. Brunebarbe, B. Klingler, and B. Totaro. Symmetric differentials and the fundamental group. *Duke Math. J.*, 162(14) :2797–2813, 2013.

[BN06] K. Behrend and B. Noohi. Uniformization of deligne-mumford curves. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 599 :111–153, 2006.

[Bon98] L. Bonavero. Inégalités de Morse holomorphes singulières. *J. Geom. Anal.*, 8 :409–425, 1998.

[Bor69] A. Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1969.

[Bou02] S. Boucksom. On the volume of a line bundle. *Internat. J. Math.*, 13(10) :1043–1063, 2002.

[BP08] B. Berndtsson and M. Păun. Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles. *Duke Math. J.*, 145(2) :341–378, 2008.

[Bro78] R. Brody. Compact manifolds and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 235 :213–219, 1978.

[Bru16a] Y. Brunebarbe. A strong hyperbolicity property of locally symmetric varieties. *arXiv :1606.03972*, 2016.

[Bru16b] Y. Brunebarbe. Symmetric differentials and variations of Hodge structures. *J. Reine Angew. Math.*, 2016.

[BT15] B. Bakker and J. Tsimerman. The Kodaira dimension of complex hyperbolic manifolds with cusps. *arXiv :1503.05654*, 2015.

[Cad16] B. Cadorel. Symmetric differentials on complex hyperbolic manifolds with cusps. *arXiv :1606.05470*, 2016.

[Cad17] B. Cadorel. Jet differentials on toroidal compactifications of ball quotients. *arXiv :1707.07875*, 2017.

[CC15a] G. Di Cerbo and L. F. Di Cerbo. On the canonical divisor of smooth toroidal compactifications of complex hyperbolic manifolds. *arXiv :1502.06258*, 2015.

[CC15b] G. Di Cerbo and L.F. Di Cerbo. Effective results for complex hyperbolic manifolds. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 91(1) :89–104, 2015.

[CC15c] G. Di Cerbo and L.F. Di Cerbo. Positivity in Kähler-Einstein theory. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 159(2) :321–338, 2015.

[CMSP03] J. Carlson, St. Müller-Stach, and C. Peters. *Period mappings and period domains*, volume 85 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[CP07] F. Campana and M. Păun. Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérées. *Compos. Math.*, 143(1) :95–111, 2007.

[CP15] F. Campana and M. Păun. Orbifold generic semi-positivity : an application to families of canonically polarized manifolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(2) :835–861, 2015.

[CRT17] B. Cadorel, E. Rousseau, and B. Taji. Hyperbolicity of singular spaces. *arXiv :1710.08832*, 2017.

[Dem92] J.-P. Demailly. Singular Hermitian metrics on positive line bundles. In *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, volume 1507, pages 87–104. Springer, Berlin, 1992.

[Dem97] J.-P. Demailly. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math.*, 73 :3–23, 1997.

[Dem11] J.-P. Demailly. Holomorphic Morse inequalities and the Green-Griffiths-Lang conjecture. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(4, Special Issue : In memory of Eckart Viehweg) :1165–1207, 2011.

[Dem12] J.-P. Demailly. Hyperbolic algebraic varieties and holomorphic differential equations. *Acta Math. Vietnam.*, 37(4) :441–512, 2012.

[Div16] S. Diverio. Segre forms and Kobayashi-Lübke inequality. *Math. Z.*, 283(3-4) :1033–1047, 2016.

[Dol82] I. Dolgachev. Weighted projective varieties. In *Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*, volume 956, pages 34–71. Springer, Berlin, 1982.

[Eys97] P. Eyssidieux. La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin. *J. reine angew. Math.*, (490) :155–212, 1997.

[Fri91] R. Friedman. On threefolds with trivial canonical bundle. In *Complex geometry and Lie theory*, volume 53 of *Proc. of Symposia in Pure Math*, pages 103–134. American Mathematical Society, 1991.

[Fuj75] A. Fujiki. On resolutions of cyclic quotient singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 10(1) :293–328, 1974/75.

[Ful98] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[GG80] M. Green and P. Griffiths. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In *The Chern Symposium 1979, Proc. Internal. Sympos. Berkeley, CA, 1979*, page 41–74, New York, 1980. Springer-Verlag.

[Gri68] P. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II. *Amer. J. Math*, 90 :568–626,805–865, 1968.

[Gri69] P. Griffiths. Hermitian differential geometry, chern classes, and positive vector bundles. *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, pages 185–251, 1969.

[Gru09] S. Grushevsky. Geometry of $\mathcal{A}_g$ and its compactifications. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–234. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[GS69] P. Griffiths and W. Schmid. Locally homogeneous complex manifolds. *Acta Math.*, 123 :253–302, 1969.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HPS16] C. Hacon, M. Popa, and C. Schnell. Algebraic fiber spaces over abelian varieties : around a recent theorem by Cao and Paun. *ArXiv e-prints*, November 2016.

[HT06] J.-M. Hwang and W.-K. To. Uniform boundedness of level structures on abelian varieties over complex function fields. *Math. Ann.*, 335(2) :363–377, 2006.

[KM98] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Kob76] S. Kobayashi. Intrinsic distances, measures and geometric function theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 :357–416, 1976.

[Kob87] S. Kobayashi. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles.* Princeton University Press, 1987.

[Lan87] S. Lang. *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[Laz04a] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.

[Laz04b] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Lu99] Z. Lu. On the geometry of classifying spaces and horizontal slices. *Amer. J. Math.*, 121(1) :177–198, 1999.

[Mar84] G. A. Margulis. Arithmeticity of the irreducible lattices in the semi-simple groups of rank greater than 1. *Inventiones mathematicae*, 76(1) :93–120, Feb 1984.

[Mok89] N. Mok. *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds, Series in Pure Mathematics*, volume 6. World Scientific Publishing Company, 1989.

[Mok07] N. Mok. Rigidity problems on compact quotients of bounded symmetric domains. *Proceedings of the International Conference on Complex Geometry and Related Fields (Ams/Ip Studies in Advanced Mathematics)*, 2007.

[Mok12] N. Mok. Projective algebraicity of minimal compactifications of complex-hyperbolic space forms of finite volume. In *Perspectives in analysis, geometry, and topology*, volume 296, pages 331–354. Birkhäuser/Springer, New York, 2012.

[Mum77] D. Mumford. Hirzebruch's proportionality theorem in the noncompact case. *Invent. Math.*, 42 :239–272, 1977.

[Nad89] A. M. Nadel. The non-existence of certain level structures on abelian varieties over complex function fields. *Ann. of Math.*, 129 :161–178, 1989.

[Nak00] Michael Nakamaye. Stable base loci of linear series. *Mathematische Annalen*, 318(4) :837–847, 2000.

[Nak04] N. Nakayama. *Zariski-decomposition and Abundance*. MSJ memoirs. Math. Soc. Japan, 2004.

[NW14] J. Noguchi and J. Winkelmann. *Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation, Principles of Mathematical Sciences*, volume 350. Springer, Tokyo, 2014.

[Par98] J. R. Parker. On the volumes of cusped, complex hyperbolic manifolds and orbifolds. *Duke Math. J.*, 94(3) :433–464, 09 1998.

[Pău16] M. Păun. Singular Hermitian metrics and positivity of direct images of pluricanonical bundles. *ArXiv e-prints*, June 2016.

[Pet90] C. A. M. Peters. Rigidity for variations of Hodge structure and Arakelov-type finiteness theorems. *Compositio Math.*, 75(1) :113–126, 1990.

[Pop08] D. Popovici. Regularization of currents with mass control and singular Morse inequalities. *J. Differential Geom.*, 80(2) :281–326, 2008.

[PT14] M. Păun and S. Takayama. Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images. *ArXiv e-prints*, September 2014.

[Rou15] E. Rousseau. Hyperbolicity, automorphic forms and Siegel modular varieties. *arXiv :1302.4723*, 2015.

[RT11] J. Ross and R. Thomas. Weighted projective embeddings, stability of orbifolds, and constant scarla curvature kär metrics. *J. Differential Geom.*, 88(1) :109–159, 05 2011.

[SY96] Y.-T. Siu and S. K. Yeung. Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane. *Invent. Math.*, 124 :573–618, 1996.

[SY97] Y. Siu and S. Yeung. Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degrees. *American Journal of Mathematics*, 119 no. 5 :1139–1172, 1997.

[Tia87] G. Tian. Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weyl metric. In *Mathematical aspects of string theory (S. Yau, ed.)*, pages 629–646. World Scientific Press, 1987.

[Toë99] B. Toën. Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford. *K-Theory*, 18 :33–76, 1999.

[TY15] W.-K. To and S.-K. Yeung. Finsler metrics and Kobayashi hyperbolicity of the moduli spaces of canonically polarized manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 181(2) :547–586, 2015.

[Vie83] E. Viehweg. Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces. In *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, volume 1 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 329–353. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[Vie01] E. Viehweg. Positivity of direct image sheaves and applications to families of higher dimensional manifolds. In *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)*, volume 6 of *ICTP Lect. Notes*, pages 249–284. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[Voi02] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Collection SMF. Société Mathématique de France, 2002.

[VZ02] E. Viehweg and K. Zuo. Base spaces of non-isotrivial families of smooth minimal models. In *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, pages 279–328. Springer, Berlin, 2002.

[Wei86] R. Weissauer. Untervarietäten der Siegelschen Modulmannigfaltigkeiten von allgemeinem Typ. *Math. Ann.*, 275(2) :207–220, 1986.

[Wol72] Joseph A Wolf. Fine structure of hermitian symmetric spaces. In *Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970)*, pages 271–357, 1972.

[Zuo00] K. Zuo. On the negativity of kernels of Kodaira-Spencer maps on Hodge bundles and applications. *Asian J. Math.*, 4(1) :279–301, 2000. Kodaira's issue.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'étude de l'hyperbolicité complexe de compactifications de quotients de domaines symétriques bornés, et plus spécifiquement, de quotients de la boule. Si l'on se donne une telle compactification, on s'intéresse ainsi à la géométrie des courbes entières qu'elle contient, ainsi qu'au type de ses sous-variétés. On commence par prouver un critère métrique de positivité du fibré cotangent d'une variété complexe quelconque, reposant notamment sur les travaux de J.-P. Demailly et de S. Boucksom. Ce critère peut s'appliquer à une large classe de variétés, dépassant le strict cadre des quotients de domaines symétriques bornés ; dans un travail en commun avec Y. Brunebarbe, on applique ainsi ces méthodes au cas des variétés supportant une variation de structures de Hodge complexe.

Dans le cas d'un quotient de la boule, ces mêmes méthodes métriques permettent de montrer qu'un revêtement ramifié d'une compactification toroïdale lisse, étale sur l'intérieur, et ramifiant à des ordres supérieurs à 7 sur le bord, ne contient que des variétés de type général en dehors de son bord. Dans ce cadre, ceci fournit une version effective d'un théorème de Y. Brunebarbe. On peut aussi appliquer ces techniques à l'étude d'autres situations que ces compactifications lisses : avec E. Rousseau et B. Taji, on donne des critères pour l'hyperbolicité algébrique de ces compactifications, lorsque les quotients sont singuliers. On présente aussi une version effective d'un théorème de J.-P. Demailly, concernant le caractère big des différentielles de jets sur la compactification donnée. Enfin, on montre que les méthodes métriques présentées précédemment s'étendent au cas de tous les domaines symétriques bornés. Nos méthodes permettent par ailleurs de traiter des hyperbolicités algébrique et transcendante de manière unifiée, et peuvent fournir des résultats effectifs similaires au précédent pour d'autres domaines que la boule.

Abstract

This work deals with the study of complex hyperbolicity of compactifications of quotients of bounded symmetric domains, and more specifically, of quotients of the ball. If we are given such a compactification, we are interested in the geometry of the entire curves it contains, as well as to the type of its subvarieties. We start by showing a metric criterion for the positivity of the cotangent bundle of a complex manifold, based in particular on the work of J.-P. Demailly and of S. Boucksom. This criterion can be applied to a large class of varieties, going beyond the frame of quotients of bounded symmetric domains ; in a joint work with Y. Brunebarbe, we apply these particular methods to the case of manifolds supporting a complex variation of Hodge structures.

In the case of a ball quotient, these same methods can be used to show that on a ramified cover of a toroidal compactification, étale on the inside part, and ramifying at orders higher than 7 on the boundary, there is no subvariety which is not of general type, and also not included in the boundary. In this setting, this gives an effective version of a theorem of Y. Brunebarbe. We can also apply these metric methods to the study of other situations than these smooth compactifications : with E. Rousseau and B. Taji, we give metric criterions for the algebraic hyperbolicity of these compactifications, when the quotients have cyclic singularities. In the case of the ball, we present also an effective version of a theorem of J.-P. Demailly, concerning the bigness of the Green-Griffiths jet differentials on the given compactification. Finally, we show that the previously described metric methods can actually be applied in the case of any bounded symmetric domain. Our methods permit to give a unified treatment of the algebraic and transcendental complex hyperbolicity, and can give effective results, similar to the previous ones, for other bounded symmetric domains than the ball.